УДК 512.542

С. Ф. КАМОРНИКОВ[1], *О. Л. ШЕМЕТКОВА*[2]

НОВЫЕ СВОЙСТВА ПРЕФРАТТИНИЕВЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

[1]*Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений*
[2] *Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, Москва*

(*Поступила в редакцию 12.03.2010*)

Введение. В 1962 г. В. Гашюц в работе [1] ввел понятие префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы. Обосновывая терминологию, он пояснил, что для каждой префраттиниевой подгруппы H группы G можно получить подгруппу Фраттини любой факторгруппы G/N:

$$\Phi(G/N) = \mathrm{Core}_{G/N}(HN/N).$$

Таким образом, в префраттиниеву подгруппу проецируются подгруппы Фраттини всех гомоморфных образов группы.

Отмеченное выше равенство позволяет предположить, что некоторые свойства подгруппы Фраттини группы G наследуются ее префраттиниевыми подгруппами. В настоящей работе данная гипотеза подтверждается в отношении тех свойств подгруппы Фраттини, которые касаются связи $\Phi(G)$ с нормальными подгруппами группы G.

Главная цель работы – доказательство следующих трех теорем.

Т е о р е м а 1. *Если H – префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G, то для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппа $H \cap N$ содержит некоторую префраттиниеву подгруппу группы N.*

Теорема 1 связана с развитием следующего классического свойства подгруппы Фраттини (см., например, [2]): если N – нормальная подгруппа группы G, то $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$.

В связи с теоремой 1 возникает задача нахождения достаточных условий, при которых подгруппа $H \cap N$ в точности является префраттиниевой подгруппой нормальной подгруппы N группы G, если H – префраттиниева подгруппа группы G. Некоторые из таких достаточных условий дают теоремы 2 и 3.

Т е о р е м а 2. *Если H – префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G, то для любой нормальной холловой подгруппы N группы G подгруппа $H \cap N$ является префраттиниевой подгруппой в N.*

Теорема 2 переносит на префраттиниевы подгруппы следующее свойство подгруппы Фраттини [3]: если N – нормальная холлова подгруппа группы G, то $\Phi(N) = \Phi(G) \cap N$. Этот результат для нормальных силовских подгрупп доказан ранее Р. Бэром в [4], а его обобщение дано в [5].

Т е о р е м а 3. *Если нормальная подгруппа N нормально дополняема в конечной разрешимой группе G и H – префраттиниева подгруппа группы G, то $H \cap N$ – префраттиниева подгруппа группы N. В частности, если $G = N_1 \times N_2$ и H_i – префраттиниева подгруппа группы N_i, где $i = 1, 2$, то $H_1 \times H_2$ – префраттиниева подгруппа группы G.*

Приведенное в теореме 3 свойство префраттиниевых подгрупп является аналогом следующего свойства подгруппы Фраттини: если $G = N_1 \times N_2$, то $\Phi(G) = \Phi(H_1) \times \Phi(H_2)$.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в [2].

Вспомогательные леммы. В оригинальном изложении [1] префраттиниева подгруппа определяется как пересечение дополнений всех корон группы. Мы же возьмем за основу следующее конструктивное определение, не использующее понятие короны главного фактора группы.

Нам потребуются некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов. Пусть M – подгруппа, а L / K – нормальный фактор группы G. Говорят, что:

1) M является *дополнением* фактора L / K, если $ML = G$ и $M \cap L = K$ (в этом случае L / K называется *дополняемым фактором*);

2) M *покрывает* фактор L / K, если $MK \supseteq L$;

3) M *изолирует* фактор L / K, если $M \cap L \subseteq K$.

Определение. Пусть в некотором главном ряду группы G имеется ровно k дополняемых главных факторов и $M_1,...,M_k$ – максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные дополняемые факторы этого ряда. Тогда подгруппа $M_1 \cap ... \cap M_k$ называется *префраттиниевой подгруппой* группы G.

Следующие четыре леммы описывают ключевые свойства префраттиниевых подгрупп. Доказательство их можно найти в [1, 2].

Лемма 1. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *каждая префраттиниева подгруппа группы G изолирует все дополняемые главные факторы группы G и покрывает все ее фраттиниевы главные факторы*;

2) *любые две префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены.*

Лемма 2. *Пусть H – префраттиниева подгруппа группы G. И пусть $N \triangleleft G$. Тогда*:

1) *если $N \subseteq \Phi(G)$, то $N \subseteq H$*;

2) *HN / N – префраттиниева подгруппа группы G / N*.

Лемма 3. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Если $N \subseteq \Phi(G)$ и H / N – префраттиниева подгруппа группы G / N, то H – префраттиниева подгруппа группы G*.

Лемма 4. *Если H – префраттиниева подгруппа критической максимальной подгруппы группы G, то $H\Phi(G)$ – префраттиниева подгруппа группы G*.

Напомним, что максимальная подгруппа M группы G называется *критической*, если $G = MF(G)$.

Нам понадобится также информация о главных факторах нормальной подгруппы группы G, изложенная в следующих двух леммах.

Лемма 5. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G, L – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Если R / S – N-главный фактор подгруппы L, а M – дополнение к L в G, то справедливы следующие утверждения*:

1) *существует нормальная в N подгруппа C, изолирующая фактор R / S в L*;

2) *подгруппа $C(M \cap N)$ является дополнением фактора R / S в N*.

Доказательство. На основании утверждения А, 4.13 из [2] минимальная нормальная подгруппа L группы G представима в виде прямого произведения минимальных нормальных подгрупп из N. Поэтому найдется нормальная в N подгруппа D такая, что $L = R \times D$. Обозначим подгруппу SD через C. Простая проверка показывает, что подгруппа C нормальна в N и дополняет в L фактор R / S, т. е. $RC = L$ и $R \cap C = S$.

Отсюда $R(C(M \cap N)) = (RC)(M \cap N) = L(M \cap N) = LM \cap N = N$. А так как $D(M \cap N)$ – дополнение к R в N, то

$$R \cap C(M \cap N) = R \cap SD(M \cap N) = S(R \cap D(M \cap N)) = S .$$

Лемма доказана.

Л е м м а 6. *Пусть* N *– нормальная подгруппа группы* G *,* L/S *– такой дополняемый главный фактор группы* G *, что* $1 \subseteq S \subset L \subseteq N$ *. Если* $S = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_k = L$ *– отрезок* N *-главного ряда подгруппы* L *, а* M *– дополнение к* L/S *в* G *, то справедливы следующие утверждения*:

1) *существуют нормальные в* N *подгруппы* $C_1,...,C_k$ *, которые содержат* S *и дополняют соответственно факторы* $L_1/L_0,...,L_k/L_{k-1}$ *в* L ;

2) $C_1(M \cap N),...,C_k(M \cap N)$ *– максимальные подгруппы группы* N *, дополняющие в* N *соответственно факторы* $L_1/L_0,...,L_k/L_{k-1}$;

3) $\bigcap_{i=1}^{k} C_i(M \cap N) = M \cap N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим факторгруппу G/S . Тогда L/S – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы G/S , содержащаяся в N/S . Теперь утверждения 1) и 2) прямо следуют из леммы 5.

Очевидно, $M \cap N \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} C_i(M \cap N)$. Кроме того, подгруппа $\bigcap_{i=1}^{k} C_i(M \cap N)$ изолирует все факторы L_i/L_{i-1} и покрывает все главные факторы группы N , расположенные на отрезке от L до N . Поэтому на основании леммы А, 1.7 из [2] справедливо равенство $|\bigcap_{i=1}^{k} C_i(M \cap N)| = |N : L| = |M \cap N|$. Значит, $\bigcap_{i=1}^{k} C_i(M \cap N) = M \cap N$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Если подгруппа N единична, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем далее, что $N \neq 1$. Рассмотрим главный ряд

$$h : 1 = N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_s = N = G_0 \subset G_1 \subset ... \subset G_r = G$$

группы G , проходящий через подгруппу N .

Пусть $N_{i_1}/N_{i_1-1},...,N_{i_m}/N_{i_m-1}$ и $G_{j_1}/G_{j_1-1},...,G_{j_n}/G_{j_n-1}$ – все дополняемые главные факторы ряда h . И пусть $M_1,...,M_m$ и $M_1^*,...,M_n^*$ – максимальные подгруппы группы G , дополняющие соответственно главные факторы $N_{i_1}/N_{i_1-1},...,N_{i_m}/N_{i_m-1}$ и $G_{j_1}/G_{j_1-1},...,G_{j_n}/G_{j_n-1}$.

Из определения следует, что $M_1 \cap ... \cap M_m \cap M_1^* \cap ... \cap M_n^*$ – префраттиниева подгруппа группы G . На основании леммы 1, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$M_1 \cap ... \cap M_m \cap M_1^* \cap ... \cap M_n^* = H .$$

Так как подгруппы $M_1^*,...,M_n^*$ содержат N , то $H \cap N = M_1 \cap ... \cap M_m \cap N$. Уплотним ряд

$$h_N : 1 = N_0 \subset N_1 \subset ... \subset N_s = N$$

до главного ряда подгруппы N . Пусть

$$N_{i_t-1} = N_{i_t 0} \subset N_{i_t 1} \subset ... \subset N_{i_t k_i} = N_{i_t}$$

– уплотненный отрезок ряда h_N на участке от N_{i_t-1} до N_{i_t} , где $t = 1,...,m$. На основании леммы 6 для всех $t = 1,...,m$ факторы $N_{i_t 1}/N_{i_t 0},...,N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i -1}$ дополняемы в N . Если $C_{i_t 1},...,C_{i_t k_i}$ – дополнения факторов $N_{i_t 1}/N_{i_t 0},...,N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i -1}$ в N_{i_t} , то $C_{i_t 1}(M_t \cap N),...,C_{i_t k_i}(M_t \cap N)$ – максимальные подгруппы группы N , дополняющие факторы $N_{i_t 1}/N_{i_t 0},...,N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i -1}$, и при этом выполняется равенство $C_{i_t 1}(M_t \cap N) \cap ... \cap C_{i_t k_i}(M_t \cap N) = M_t \cap N$.

После уплотнения некоторые фраттиниевы главные факторы ряда h, расположенные на отрезке от 1 до N, могут стать дополняемыми в N. Пусть число таких N-главных факторов равно l и $T_1,...,T_l$ – дополнения к ним (по одному для каждого) в группе N. Тогда по определению получаем, что подгруппа H_1, равная

$$T_1 \cap ... \cap T_l \cap C_{t_1 1}(M_1 \cap N) \cap ... \cap C_{t_m k_m}(M_m \cap N),$$

является префраттиниевой подгруппой группы N. Учитывая изложенное выше, окончательно получаем

$$H_1 = T_1 \cap ... \cap T_l \cap (M_1 \cap N) \cap ... \cap (M_m \cap N) \subseteq$$
$$\subseteq (M_1 \cap N) \cap ... \cap (M_m \cap N) = M_1 \cap ... \cap M_m \cap N = H \cap N.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Применим индукцию по порядку группы G. Заметим, что если подгруппа N единична, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем, что $N \neq 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N.

Рассмотрим факторгруппу G/L. Очевидно, N/L – холлова подгруппа группы G/L. Кроме того, на основании леммы 2 подгруппа HL/L является префраттиниевой в G/L. Так как для группы G/L теорема верна по индукции, то $HL/L \cap N/L = (H \cap N)L/L$ – префраттиниева подгруппа группы N/L. Далее рассматриваем два случая.

Случай 1. Пусть $L \subseteq \Phi(G)$. Тогда ввиду леммы 2 $L \subseteq H$ и $(H \cap N)L/L = (H \cap N)/L$ – префраттиниева подгруппа группы N/L. На основании теоремы Я. Г. Берковича (см. [3] и [5]) имеем $L \subseteq \Phi(N)$. Значит, ввиду леммы 3 $H \cap N$ – префраттиниева подгруппа группы N.

Случай 2. Пусть теперь каждая минимальная нормальная подгруппа L группы G, содержащаяся в N, не содержится в $\Phi(G)$. Пусть $\pi = \pi(N)$. Тогда $\Phi(G)$ – π'-группа. Кроме того, в группе G найдется максимальная подгруппа M, которая не содержит L. Очевидно, M является критической.

Пусть H_1 – префраттиниева подгруппа группы M. Так как для группы M и ее холловой подгруппы $M \cap N$ теорема верна по индукции, то $H_1 \cap (M \cap N) = H_1 \cap N$ – префраттиниева подгруппа группы $M \cap N$.

Ввиду леммы 4, $H_1\Phi(G)$ – префраттиниева подгруппа группы G. Очевидно, $H_1\Phi(G) \cap N \supseteq H_1 \cap N$. Так как $\Phi(G)$ является π'-группой, то порядки холловых π-подгрупп групп $H_1\Phi(G)$ и H_1 совпадают. Поэтому из включения $H_1\Phi(G) \cap N \supseteq H_1 \cap N$ следует равенство $H_1\Phi(G) \cap N = H_1 \cap N$.

Покажем, что $H_1 \cap N$ – префраттиниева подгруппа группы N. По определению $H_1 \cap N = S_1 \cap ... \cap S_k$, где $S_1,...,S_k$ – максимальные подгруппы группы $M \cap N$, изолирующие все дополняемые главные факторы главного ряда

$$h: 1 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_r = M \cap N$$

группы $M \cap N$. На основании утверждения А, 4.13 из [2] получаем $L = L_1 \times ... \times L_t$, где L_i – минимальная нормальная подгруппа группы N для любого $i = 1,...,t$. Так как $\Phi(N) = 1$, то каждая из подгрупп L_i дополняема в N. Очевидно, подгруппы $T_1 = (L_2 \times ... \times L_t)(M \cap N)$,..., $T_i = (L_1 \times ... \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times ... \times L_t)(M \cap N)$,..., $T_t = (L_1 \times ... \times L_{t-1})(M \cap N)$ являются дополнениями в N соответственно подгрупп $L_1,...,L_i,...,L_t$.

Рассмотрим ряд $f: 1 \subset L_1 \subset L_1L_2 \subset ... \subset L_1L_2...L_t = L = LM_0 \subset LM_1 \subset ... \subset LM_r = M \cap N$. Очевидно, f – главный ряд группы N. При этом, если R/S – дополняемый главный фактор ряда h, то RL/SL – дополняемый главный фактор ряда f. Верно и обратное: дополняемость фактора LM_i / LM_{i-1} влечет дополняемость фактора M_i / M_{i-1}.

Таким образом, $T_1, ..., T_t, LS_1, ..., LS_k$ – система максимальных подгрупп группы N, изолирующих все дополняемые главные факторы ряда f. По определению $P = T_1 \cap ... \cap T_t \cap LS_1 \cap ... \cap LS_k$ – префраттиниева подгруппа группы N. Очевидно, подгруппа P содержит подгруппу $H_1 \cap N$. Кроме того, подгруппа $H_1 \cap N$ изолирует все дополняемые главные факторы группы N и покрывает все ее фраттиниевы главные факторы. Значит, на основании леммы А, 1.7 из [2] справедливо равенство $|P| = |H_1 \cap N|$. Отсюда окончательно имеем, что $P = H_1 \cap N$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Ввиду того, что нормальная подгруппа N является нормально дополняемой в G, ее любой главный фактор L/K является главным фактором группы G. Кроме того, фактор L/K дополняем в N тогда и только тогда, когда он дополняем в G.

Если P – префраттиниева подгруппа группы N, то на основании теоремы 1 получаем $P \subseteq N \cap H$, где H – некоторая префраттиниева подгруппа группы G. Сравнивая теперь порядки подгрупп P и $H \cap N$, получаем на основании леммы А, 1.7 из [2], что $|P| = |H \cap N|$. Следовательно, справедливо равенство $P = H \cap N$. Теорема доказана.

Замечание. Условие нормальной дополняемости подгруппы N в группе G нельзя ослабить до простой дополняемости. На это указывает, в частности, следующий пример.

Пусть G – экстраспециальная группа порядка p^3 экспоненты p, т. е.

$$G = \left\langle x, y \mid x^p = y^p = 1, [x, y] \in Z(G) \right\rangle.$$

Тогда $\Phi(G) = \left\langle [x, y] \right\rangle$ – циклическая группа порядка p. Очевидно, $\Phi(G)$ – префраттиниева подгруппа группы G. Пусть $N = \left\langle x \right\rangle \times \left\langle [x, y] \right\rangle$. Подгруппа $\left\langle y \right\rangle$ является дополнением к N в G. Префраттиниева подгруппа P группы N единична. Поэтому $1 = P \neq N \cap \Phi(G) = \left\langle [x, y] \right\rangle$.

Литература

1. Gaschütz W. // Arch. Math. 1962. Bd. 13, N 3. S. 418–426.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New-York, 1992.
3. Berkovich Y. // Glaznik Matem. 2005. Vol. 40(60). P. 207–233.
4. Baer R. // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.
5. Шеметкова О. Л. // Алгебра и её приложения: Тр. Междунар. алгебраической конф., посвященной 80-летию со дня рожд. А. И. Кострикина. Нальчик, 2009. С. 130–131.

S. F. KAMORNIKOV, O. L. SHEMETKOVA

NEW PROPERTIES OF PREFRATTINI SUBGROUPS IN FINITE SOLUBLE GROUPS

Summary

Let G be a finite soluble group, H a prefrattini subgroup of G. It is proved that for any normal subgroup N of G the following assertions hold: 1) $H \cap N$ contains some prefrattini subgroup of N; 2) if N is a Hall subgroup in G, then $H \cap N$ is a prefrattini subgroup of N.