ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 27 № 1 2021

УДК 512.542

О ДВУХ ПРОБЛЕМАХ ИЗ “КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ”

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

В статье решаются проблемы 19.87 и 19.88 из “Коуровской тетради”, предложенные А. Н. Скибой. Доказывается, что если для каждой силовской подгруппы P конечной группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-разрешимая (σ-нильпотентная) подгруппа T, что $VT = G$, то группа G является σ-разрешимой (соответственно σ-нильпотентной).

Ключевые слова: конечная группа, σ-разрешимая группа, σ-нильпотентная группа, разбиение множества всех простых чисел, силовская подгруппа, максимальная подгруппа.

S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. On two problems from “The Kourovka Notebook.”

We solve Problems 19.87 and 19.88 formulated by A.N. Skiba in “The Kourovka Notebook.” It is proved that if, for every Sylow subgroup P of a finite group G and every maximal subgroup V of P, there is a σ-soluble (σ-nilpotent) subgroup T such that $VT = G$, then G is σ-soluble (σ-nilpotent, respectively).

Keywords: finite group, σ-soluble group, σ-nilpotent group, partition of the set of all prime numbers, Sylow subgroup, maximal subgroup.

MSC: 20D10, 0D15, 20D30

DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-98-102

Введение

В работе решаются следующие две проблемы из “Коуровской тетради” [1], предложенные А. Н. Скибой. Рассматриваются только конечные группы.

Проблема 1 [1, вопрос 19.87]. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-разрешимая подгруппа T, что $VT = G$. Верно ли, что группа G является σ-разрешимой?*

Проблема 2 [1, вопрос 19.88]. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-нильпотентная подгруппа T, что $VT = G$. Верно ли, что группа G является σ-нильпотентной?*

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; по определению $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Далее, всегда $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [2], будем говорить, что группа G — *σ-примарна*, если $\pi(G) \subseteq \sigma_i$ для некоторого $i \in I$.

Определение 1. Группа G называется σ-разрешимой, если каждый ее главный фактор является σ-примарной группой.

Понятно, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда она σ-разрешима для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$. Отметим еще, что если группа G разрешима, то она σ-разрешима для любого разбиения σ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта Ф20Р-291.

О п р е д е л е н и е 2. Группа G называется σ-нильпотентной, если она является прямым произведением некоторых σ-примарных групп.

Очевидно, группа G является нильпотентной тогда и только тогда, когда она σ-нильпотентна для минимального разбиения σ.

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем.

Теорема 1. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-разрешимая подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — σ-разрешимая группа.*

Следствие 1. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая разрешимая подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — разрешимая группа.*

Теорема 2. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-нильпотентная подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — σ-нильпотентная группа.*

Следствие 2. *Пусть для каждой силовской подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы V из P существует такая нильпотентная подгруппа T, что $VT = G$. Тогда G — нильпотентная группа.*

1. Предварительные результаты

Используемые в работе определения и обозначения стандартны.

Напомним только, что:

1) *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений;

2) формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$;

3) класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно расширений*, если всегда из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{S}_\sigma$ всех σ-разрешимых групп является насыщенной формацией, замкнутой относительно расширений.

Лемма 1. *Пусть N — σ-примарная минимальная нормальная подгруппа группы G. Если G удовлетворяет условиям теоремы 1, то группа G/N также удовлетворяет условиям теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что N — σ_1-группа. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $|P|$ делит $|N|$, то из условия следует, что в G найдется некоторая σ-разрешимая подгруппа T, для которой справедливо равенство $G = NT$. Но тогда из $G/N \cong T/T \cap N$ имеем, что G/N — σ-разрешимая группа, а потому группа G/N удовлетворяет условиям теоремы 1.

Следовательно, $|P|$ не делит $|N|$. Пусть R/N — силовская p-подгруппа группы G/N. Если R_1/N — максимальная подгруппа группы R/N, то по теореме Силова $R_1 = P_1N$ для некоторой силовской p-подгруппы P_1 группы R_1. При этом P_1 — максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы P_2 группы R. Очевидно, P_2 — силовская p-подгруппа группы G. По условию $G = TP_1$ для некоторой σ-разрешимой подгруппы T группы G. Отсюда имеем, что

$$G/N = TP_1/N = (TN/N)(P_1N/N) = (TN/N)(R_1/N).$$

При этом из изоморфизма $TN/N \cong T/T \cap N$ следует, что подгруппа TN/N является σ-разрешимой. Таким образом, группа G/N удовлетворяют условиям теоремы 1. $\square$

Отметим следующий простой результат.

Лемма 2. *Пусть* $L = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_m$, *где* $m \geq 2$ *и* L_i *— изоморфные простые неабелевы группы. Предположим, что* F *— собственная подгруппа из* L *и* $|L : F| = p^t \geq p$. *Тогда в* L_1 *найдется подгруппа* F_1 *такая, что* $|L_1 : F_1| = p^k \geq p$.

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что подгруппа L_1 не содержится в F. Тогда, очевидно, $L_1 \cap F \subset L_1$ и $|L_1 : L_1 \cap F| = p^r$, где $r \geq 1$. □

Лемма 3. *Пусть для каждой силовской подгруппы* P *группы* G *и любой максимальной подгруппы* V *из* P *существует такая* σ*-разрешимая подгруппа* T, *что* $VT = G$. *Если* N *— минимальная нормальная подгруппа группы* G, *то* N σ*-примарна.*

Доказательство. Предположим, что некоторая из подгрупп T содержит N. Тогда подгруппа N является σ-разрешимой, а значит и σ-примарной, группой.

Пусть $p \in \pi(N)$ и $P \in Syl_p(G)$. Тогда, в силу сказанного выше, для любой максимальной подгруппы V из P существует такая σ-разрешимая подгруппа T, что $VT = G$ и T не содержит подгруппу N. Рассмотрим подгруппу $H = NT$. Ясно, что $T \subset H$. Поэтому $|H : T| = p^k \geq p$. Отсюда и из факторизации $H = NT$ следует, что $|N : N \cap T| = |H : T| = p^k \geq p$.

Подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Из $|N : T \cap N| = p^k$, где $k \geq 1$, и леммы 2 следует, что подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу H, индекс которой является степенью простого числа p. Тогда ввиду [3, теорема 1] справедливо одно из следующих утверждений:

(a) $N_1 = A_n$ и $H \cong A_{n-1}$, где $n = p^k$;

(b) $N_1 = PSL_n(q)$ и H — стабилизатор линии или гиперплоскости, при этом
$$|G : H| = (q^n - 1)/(q - 1) = p^k \quad (n \text{ – простое число});$$

(c) $N_1 = PSL_2(11)$ и $H \cong A_5$;

(d) $N_1 = M_{23}$ и $H \cong M_{22}$ или $G = M_{11}$ и $H \cong M_{10}$;

(e) $N_1 = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ и H — параболическая подгруппа индекса 27.

Ввиду произвольного выбора простого числа $p \in \pi(N)$ для любого простого $p \in \pi(N_1)$ подгруппа N_1 содержит максимальную подгруппу, индекс которой является степенью p. Простая проверка показывает, что ни одна из групп, перечисленных в (a)–(e), таким свойством не обладает. Поэтому подгруппа N_1 абелева, а значит, подгруппа N σ-примарна. □

Лемма 4. *Пусть* N *— σ-примарная минимальная нормальная подгруппа группы* G. *Если* G *удовлетворяет условиям теоремы* 2, *то группа* G/N *также удовлетворяет условиям теоремы* 2.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что N — σ_1-группа. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $|P|$ делит $|N|$, то из условия леммы следует, что в G найдется некоторая σ-нильпотентная подгруппа T, для которой справедливо равенство $G = NT$. Но тогда из $G/N \cong T/T \cap N$ имеем, что G/N — σ-нильпотентная группа, а потому группа G/N удовлетворяет условиям теоремы 2.

Следовательно, $|P|$ не делит $|N|$. Пусть R/N — силовская p-подгруппа группы G/N. Если R_1/N — максимальная подгруппа группы R/N, то по теореме Силова $R_1 = P_1N$ для некоторой силовской p-подгруппы P_1 группы R_1. При этом P_1 — максимальная подгруппа некоторой силовской p-подгруппы P_2 группы R. Очевидно, P_2 — силовская p-подгруппа группы G. По условию $G = TP_1$ для некоторой σ-нильпотентной подгруппы T группы G. Отсюда заключаем, что
$$G/N = TP_1/N = (TN/N)(P_1N/N) = (TN/N)(R_1/N).$$
При этом из изоморфизма $TN/N \cong T/T \cap N$ следует, что подгруппа TN/N является σ-нильпотентной. Таким образом, группа G/N удовлетворяет условиям теоремы 2. □

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не верна. Рассмотрим группу G/N, где N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 3 подгруппа N σ-примарна. А так как $|G/N| < |G|$, то ввиду леммы 1 группа G/N σ-разрешима. Теперь из замкнутости класса $\mathfrak{S}_\sigma$ относительно расширений имеем, что G — σ-разрешимая группа. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — контрпример минимального порядка и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Отметим, что в силу теоремы 1 группа G σ-разрешима. Поэтому подгруппа N σ-примарна. Следовательно, по лемме 4 условия теоремы переносятся на факторгруппу G/N. А так как $|G/N| < |G|$, то ввиду выбора группы G группа G/N является σ-нильпотентной.

Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что N — σ_1-группа.

Далее доказательство проведем в несколько шагов.

Ш а г 1. *N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$ и $C_G(N) \subseteq N$.*

Как отмечено в [2, лемма 2.5], класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является насыщенной формацией. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{N}_\sigma$ следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Значит, ввиду [4, теорема A.15.2] $C_G(N) \subseteq N$.

Пусть $\pi(N) = \{p_1 = p, p_2, \dots, p_k\}$. Ясно, что G не σ_1-группа.

Ш а г 2. *N является p-группой.*

Предположим, что $k > 1$. Так как G не является σ_1-группой, то найдется простое число $q \in \pi(G)$, не принадлежащее σ_1. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. По условию для любого $i = 1, 2, \dots, k$ и любой силовской p_i-подгруппы P_i группы G найдется σ-нильпотентная подгруппа T_i такая, что $G = P_iT_i$. Ввиду теоремы Силова можно считать, что $Q \subseteq T_i$. А так как подгруппа N нормальна в G, то из σ-нильпотентности подгруппы T_i следует, что для любого простого $r \in \pi(N)$, отличного от p_i, некоторая силовская r-подгруппа подгруппы N содержится в $C_G(Q)$. Так как $k > 1$, то отсюда вытекает, что подгруппа N содержится в $C_G(Q)$. Пришли к противоречию с тем, что $C_G(N) \subseteq N$. Следовательно, $|\pi(N)| = 1$, т. е. N является p-группой.

Ш а г 3. $\sigma_1 \cap \pi(G) = \{p\}$.

Предположим, что $|\sigma_1 \cap \pi(G)| > 1$. Тогда найдется простое число $q \in \sigma_1 \cap \pi(G)$, отличное от p. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G и Q_1 — максимальная подгруппа из Q. Тогда по условию $G = TQ_1$ для некоторой σ-нильпотентной подгруппы T группы G. Пусть $\pi = \sigma_1$. Тогда подгруппа T представима в виде $T = T_\pi \times T_{\pi'}$. По теореме Силова $N \subseteq T_\pi$. Следовательно, $T_{\pi'} \subseteq C_G(N)$. А так как G не является σ_1-группой, то $T_{\pi'} \neq 1$. Пришли к противоречию с тем, что $C_G(N) \subseteq N$. Таким образом, имеем, что $\sigma_1 \cap \pi(G) = \{p\}$.

Ш а г 4. *N — силовская p-подгруппа группы G.*

Так как N не содержится в $\Phi(G)$, то в G существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Отсюда и из абелевости подгруппы N следует, что $M \cap N = 1$ и $M \cong G/N$. Значит, подгруппа M является σ-нильпотентной. Более того, из $\sigma_1 \cap \pi(G) = \{p\}$ следует, что подгруппа M p-разложима. Пусть M_p — силовская p-подгруппа группы M. По теореме Силова $P = M_pN$ для некоторой силовской подгруппы P группы G. Очевидно, $M_p \subset N_P(M_p)$. Отсюда и из p-разложимости подгруппы M имеем, что $M \subset N_G(M_p)$. Так как подгруппа M максимальна в G, то M_p нормальна в G. Если $M_p \neq 1$, то приходим к противоречию с тем, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно, N — силовская p-подгруппа группы G.

Ш а г 5. *Финальное противоречие.*

Итак, N — силовская p-подгруппа группы G. Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где $|N_i| = p$

для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Кроме того, если H — холлова p'-подгруппа группы G, то H максимальна в G.

Очевидно, подгруппа $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{k-1}$ максимальна в N и по условию $G = (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{k-1})T$ для некоторой σ-нильпотентной подгруппы T группы G. Из $G = (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{k-1})T$, в частности, следует, что порядок подгруппы T делится на p. Кроме того, по теореме Холла $H^x \subseteq T$ для некоторого $x \in G$. Теперь из максимальности подгруппы H в группе G имеем, что $T = G$, т.е. группа G является σ-нильпотентной. Снова пришли к противоречию. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook [e-resource]. No. 19. Novosibirsk, 2018. 250 p. URL: `http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf`.
2. **Skiba A.N.** On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010.
3. **Guralnick R.M.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4.
4. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; N Y: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

Поступила 17.01.2021
После доработки 10.02.2021
Принята к публикации 18.02.2021

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”, Гомель, Беларусь
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. *Unsolved problems in group theory.* The Kourovka notebook [e-resource]. No. 19. Novosibirsk, 2018. 250 p. Available on: `http://math.nsc.ru/~alglog/19tkt.pdf`.
2. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups . *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010.
3. Guralnick R.M. Subgroups of prime power index in a simple group. *J. Algebra*, 1983, vol. 81, no. 2, pp. 304–311. doi: 10.1016/0021-8693(83)90190-4.
4. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; N Y: Walter de Gruyter, 1992, 891 p.

Received January 17, 2021
Revised February 10, 2021
Accepted February 18, 2021

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F20R-291).

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, 246019, Gomel, Republic of Belarus. e-mail: sfkamornikov@mail.ru.

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University “MITSO”, Gomel, 246029, Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com.

Cite this article as: S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. On two problems from “The Kourovka Notebook”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 98–102.