УДК 512.542

О ДОПОЛНЯЕМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕТКИ РАЗРЕШИМЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

С.Ф. Каморников, М.М. Сорокина

В работе изучаются свойства решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов. Доказывается, что данная решетка является решеткой с дополнениями. Строится пример, показывающий, что $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ не является решеткой с единственными дополнениями. Отмечается, что $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ не модулярна.

Ключевые слова: *конечная разрешимая группа, регулярный транзитивный подгрупповой функтор, решетка, решетка с дополнениями, дополняемый элемент решетки.*

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые функторы, т.е. функторы, определенные на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых конечных групп. Используемые определения и обозначения теории конечных групп и подгрупповых функторов стандартны, их можно найти в [1,2]. Что касается терминологии теории решеток, то мы отсылаем читателей к книге [3].

Центральное место в работе занимает понятие разрешимого подгруппового функтора, которое введено А.Н. Скибой в монографии [4]. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{S}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *разрешимым подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ группы G выполняется равенство $(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi})$.

Подгрупповой функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ имеют место включения $(\theta(A))^{\varphi} \subseteq \theta(B)$, $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G. Регулярность подгруппового функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы G всегда выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ следует $H \in \theta(G)$.

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется *транзитивным*.

Первоначально идея регулярного транзитивного подгруппового функтора проявилась в приложениях. Например, в теории формаций она связана с $\mathfrak{F}$-субнормальными (Р. Картер, Т. Хоукс [5], Л.А. Шеметков [6]) и $\mathfrak{F}$-достижимыми (О. Кегель [7]) подгруппами, естественно обобщающими понятие субнормальной подгруппы. Простая проверка (см. [1]) показывает, что для любой наследственной формации $\mathfrak{F}$ каждый $\mathfrak{F}$-субнормальный и каждый $\mathfrak{F}$-достижимый подгрупповой функтор является регулярным и транзитивным.

Как самостоятельные объекты исследования регулярные транзитивные подгрупповые функторы стали рассматриваться в связи с проблемой их классификации, поставленной А.Н. Скибой:

Можно ли классифицировать все регулярные транзитивные подгрупповые функторы ([4], вопрос 1.2.12)?

Как показывает практика, данная проблема является достаточно трудной и далекой от окончательного решения. В то же время некоторые направления ее исследования получили сегодня эффективное развитие. Одно из таких направлений связано с исследованием свойств решетки всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов.

Обозначим через $\mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$ множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок $\le$, полагая, что отношение $\theta_1 \le \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$, для любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$.

Для совокупности $\{\theta_i \mid i \in I\}$ из $\mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$ определим пересечение $\theta = \bigcap_{i\in I}\theta_i$ следующим образом: $\theta(G) = \bigcap_{i\in I}\theta_i(G)$ для любой разрешимой группы G. Простая проверка показывает, что θ – регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Этот функтор является точной нижней гранью множества $\{\theta_i \mid i \in I\}$ в $\mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$. Таким образом, $\mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$ – полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор $1_{\mathfrak{S}}$, выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой функтор $0_{\mathfrak{S}}$, выделяющий в каждой группе G только саму группу G.

Пусть θ – подгрупповой функтор. Подгруппу H группы G назовем:

1) *θ-субнормальной,* если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$, что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$;

2) *θ-субабнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь $H = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = G$, что $M_{j-1} \notin \theta(M_j)$ для всех $j = 1,2,\ldots,k$.

Если θ – подгрупповой функтор, то множество всех θ-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $\mathrm{sub}_\theta(G)$, а множество всех ее θ-субабнормальных подгрупп – $\mathrm{subab}_\theta(G)$.

Лемма 1. *Если θ – подгрупповой функтор, то:*

1) *функция* $\mathrm{sub}_\theta : G \mapsto \mathrm{sub}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором;*

2) *функция* $\mathrm{subab}_\theta : G \mapsto \mathrm{subab}_\theta(G)$ *является подгрупповым функтором.*

Доказательство. Утверждение 1) доказывается непосредственной проверкой.

2) Пусть $H \in \mathrm{subab}_\theta(G)$ и φ – изоморфизм группы G. Если $H = G$, то, очевидно, $H^\varphi \in \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$. Пусть $H \ne G$. Тогда существует такая максимальная цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$, что $H_{i-1} \notin \theta(H_i)$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$. Рассмотрим максимальную цепь

$$H^\varphi = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi \subset \ldots \subset H_n^\varphi = G^\varphi.$$

Предположим, что $H_{k-1}^\varphi \in \theta(H_k^\varphi)$ для некоторого $k \in \{1,2,...,n\}$. Тогда из того, что θ – подгрупповой функтор, имеем

$$H_{k-1} = (H_{k-1}^\varphi)^{\varphi^{-1}} \in (\theta(H_k^\varphi))^{\varphi^{-1}} = \theta((H_k^\varphi)^{\varphi^{-1}}) = \theta(H_k)$$

и, тем самым, приходим к противоречию. Таким образом, $H^\varphi \in \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$, а значит, $(\mathrm{subab}_\theta(G))^\varphi \subseteq \mathrm{subab}_\theta(G^\varphi)$. Обратное включение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Далее для подгруппового функтора θ функтор $\mathrm{sub}_\theta : G \mapsto \mathrm{sub}_\theta(G)$ будем обозначать sub_θ, а функтор $\mathrm{subab}_\theta : G \mapsto \mathrm{subab}_\theta(G)$ – subab_θ.

Лемма 2. *Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то θ-субабнормальный подгрупповой функтор* subab_θ *также является регулярным.*

Доказательство. Пусть подгруппа H группы G является θ-субабнормальной и $H \ne G$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G, \tag{1}$$

что H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1,2,\dots,n$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. И пусть H_{i-1} и H_i – такие члены цепи (1), что $H_{i-1}N \neq H_iN$. Покажем, что $H_{i-1}N$ – максимальная подгруппа в H_iN. Допустим, что $H_{i-1}N \subset L \subset H_iN$ для некоторой подгруппы L группы G. Тогда, поскольку подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i, то из

$$H_{i-1} \subseteq H_{i-1} \cap L \subseteq H_i \cap L \subseteq H_i$$

следует, что либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$. Пусть имеет место первое. Тогда, поскольку $L = L \cap H_iN = (L \cap H_i)N$, то $L = H_{i-1}N$. Противоречие. Значит, $H_i \cap L = H_i$, т.е. $H_i \subseteq L$. Поэтому $H_iN \subseteq L$. Противоречие.

Итак, цепь

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \ldots \subseteq H_nN/N = G/N \qquad (2)$$

такова, что в нем для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеет место одно из двух условий:

1) $H_{i-1}N/N = H_iN/N$;

2) $H_{i-1}N/N$ – максимальная подгруппа в H_iN/N.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что все члены цепи (2) различны. Допустим, что $H_{i-1}N/N \in \theta(H_iN/N)$ для некоторого $i \in \{1,\dots,n\}$. Так как из максимальности подгруппы H_{i-1} в H_i справедливы равенства

$$H_{i-1}/H_i \cap N = H_i \cap H_{i-1}N/H_i \cap N = H_{i-1}(H_i \cap N)/H_i \cap N,$$

то $H_{i-1}/H_i \cap N \in \theta(H_i/H_i \cap N)$. Отсюда и из регулярности подгруппового функтора θ следует, что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$. Полученное противоречие доказывает, что $HN/N \in \mathrm{subab}_\theta(G/N)$.

Пусть теперь $H/N \in \mathrm{subab}_\theta(G/N)$ и $H/N \neq G/N$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \ldots \subset H_k/N = G/N,$$

что H_{i-1}/N не принадлежит $\theta(H_i/N)$ для всех $i = 1,2,\dots,k$. Так как θ – регулярный подгрупповой функтор, то H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1,2,\dots,k$. Следовательно, $H \in \mathrm{subab}_\theta(G)$. Лемма доказана.

Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то непосредственной проверкой устанавливается справедливость следующих лемм, имеющих самостоятельное значение.

Лемма 3. *Пусть θ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда θ-субнормальный подгрупповой функтор sub_θ также является регулярным.*

Лемма 4. *Для любого подгруппового функтора θ подгрупповые функторы sub_θ и subab_θ являются транзитивными.*

Лемма 5. *Пусть $\theta \in \mathrm{Re}\,g_{tr}(\mathfrak{S})$. Тогда и только тогда θ-подгруппа H группы G является θ-субабнормальной в G, когда $H = G$.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется, т.е. в G имеется собственная θ-субабнормальная θ-подгруппа H.

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то ввиду регулярности подгруппового функтора θ и на основании леммы 2 имеем, что HN/N – θ-субабнормальная θ-подгруппа группы G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то для G/N лемма выполняется, а потому $HN/N = G/N$ и $HN = G$. Если $N \subseteq H$, то $H = G$ и мы приходим к противоречию с выбором группы G.

Таким образом, N не содержится в H. Так как группа G разрешима, а N – ее минимальная нормальная подгруппа, то H – максимальная подгруппа группы G. Ввиду выбора группы G имеем, что $H \in \theta(G)$. А так как подгруппа H является θ-субабнормальной в G, то ввиду максимальности H в G имеем, что $H \notin \theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $H = G$. Лемма доказана.

Напомним, что элемент θ решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ называется *дополняемым*, если в $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ найдется элемент τ такой, что $\theta \vee \tau = 1_{\mathfrak{S}}$ и $\theta \wedge \tau = 0_{\mathfrak{S}}$. Очевидно, сами элементы $0_{\mathfrak{S}}$ и $1_{\mathfrak{S}}$ являются дополняемыми.

Теорема 1. *Решетка* $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ *всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Пусть θ – произвольный элемент решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$, а $\tau = \mathrm{subab}_{\theta}$. Ввиду лемм 2 и 4 подгрупповой функтор τ является регулярным и транзитивным. Пусть $\alpha = \theta \vee \tau$ – точная верхняя грань множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$. Тогда, в частности, $\theta \leq \alpha$, $\tau \leq \alpha$, а значит, $\theta(G) \subseteq \alpha(G)$ и $\tau(G) \subseteq \alpha(G)$ для любой группы G.

Пусть H – произвольная подгруппа разрешимой группы G. Если $H = G$, то $H \in \alpha(G)$. Пусть $H \neq G$ и

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G$$

– произвольная максимальная цепь, соединяющая подгруппу H с группой G. Очевидно, что для любого $i = 1,2,\ldots,t$ либо $H_{i\text{-}1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i\text{-}1} \notin \theta(H_i)$, а значит, либо $H_{i\text{-}1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i\text{-}1} \in \tau(H_i)$. Поэтому $H_{i\text{-}1} \in (\theta \vee \tau)(H_i)$ для всех $i = 1,2,\ldots,t$. Так как подгрупповой функтор $\alpha = \theta \vee \tau$ является транзитивным, то $H \in \alpha(G)$. А так как подгруппа H выбрана произвольным образом, то $\alpha(G)$ – множество всех подгрупп группы G. Таким образом, $\theta \vee \tau = 1_{\mathfrak{S}}$ – единица решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$.

Ввиду леммы 5 θ-подгруппа H разрешимой группы G является θ-субабнормальной тогда и только тогда, когда $H = G$. Поэтому для любой разрешимой группы G справедливо равенство $\theta(G) \cap \tau(G) = \{G\}$, а значит, точная нижняя грань $\theta \wedge \tau$ множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ является нулем этой решетки.

Итак, $\theta \wedge \tau = 0_{\mathfrak{S}}$, $\theta \vee \tau = 1_{\mathfrak{S}}$, поэтому подгрупповой функтор θ дополняем в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$. Теорема доказана.

Напомним, что элементы a и b решетки L с дополнениями называются *перспективными*, если они имеют общее дополнение, т.е. $a \vee c = b \vee c = 1$ и $a \wedge c = b \wedge c = 0$ для некоторого элемента $c \in L$. Элемент c называется в этом случае *осью перспективы*.

Теорема 2. *Для любого разрешимого регулярного транзитивного подгруппового функтора* θ *элементы* θ *и* sub_{θ} *решетки* $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ *перспективны в* $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$. *При этом осью перспективы является подгрупповой функтор* subab_{θ}.

Доказательство. Пусть θ – произвольный элемент решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$, а $\tau = \mathrm{subab}_{\theta}$. Тогда из доказательства теоремы 1 следует, что τ является дополнением θ в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$.

Пусть $\sigma = \mathrm{sub}_{\theta}$. Ввиду лемм 3 и 4 $\sigma \in \mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$.

Пусть H – произвольная подгруппа разрешимой группы G. Если $H = G$, то $H \in (\sigma \vee \tau)(G)$. Пусть $H \neq G$ и

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = G$$

– произвольная максимальная цепь, соединяющая подгруппу H с группой G то для любого $i = 1,2,\ldots,t$ либо $H_{i\text{-}1} \in \sigma(H_i)$, либо $H_{i\text{-}1} \in \tau(H_i)$. Поэтому $H_{i\text{-}1} \in (\sigma \vee \tau)(H_i)$ для всех $i = 1,2,\ldots,t$. Так как подгрупповой функтор $\sigma \vee \tau$ является транзитивным, то $H \in (\sigma \vee \tau)(G)$. Следовательно, $(\sigma \vee \tau)(G)$ – множество всех подгрупп группы G. Таким образом, $\sigma \vee \tau = 1_{\mathfrak{S}}$ – единица решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$.

Пусть $H \in (\sigma \wedge \tau)(G)$. Так как функтор $\sigma = \mathrm{sub}_\theta$ является транзитивным, то $H \in \theta(G)$. Таким образом, H – θ-подгруппа разрешимой группы G, которая является θ-субабнормальной в G. Ввиду леммы 5 $H = G$. Поэтому для любой разрешимой группы G справедливо равенство

$$(\sigma \wedge \tau)(G) = \sigma(G) \cap \tau(G) = \{G\},$$

а значит, точная нижняя грань $\sigma \wedge \tau$ множества $\{\sigma, \tau\}$ в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ является нулем этой решетки.

Итак, $\sigma \wedge \tau = 0_{\mathfrak{S}}$, $\sigma \vee \tau = 1_{\mathfrak{S}}$, поэтому подгрупповой функтор σ дополняем в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$. При этом, как и для функтора θ, функтор subab_θ является дополнением элемента sub_θ решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$. Следовательно, элементы θ и sub_θ решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ перспективны в $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$, а subab_θ – ось перспективы. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ не является решеткой с единственными дополнениями.

Пример. Следуя А.Манну [8], подгруппу H группы G будем называть X-*нормальной*, если либо $H = G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi \neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная нормальная подгруппа, содержащая H^φ. Пусть θ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество всех ее X-нормальных подгрупп. Как отмечено в [8], θ является регулярным транзитивным подгрупповым функтором. Этот функтор мы будем называть X-*нормальным.*

Отметим, что максимальная подгруппа разрешимой группы G является X-нормальной в G тогда и только тогда, когда она субнормальна в G. Это означает, что если θ – X-нормальный подгрупповой функтор, то $\mathrm{sn}(G) = \mathrm{sub}_\theta(G)$. Простые примеры показывают, что функторы θ и sub_θ различны (например, в знакопеременной группе S_4 любая силовская 3-подгруппа X-нормальна, но не субнормальна). По теореме 2 подгрупповые функторы θ и sn перспективны в решетке $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ и subab_θ – ось перспективы. Так как $\theta \neq \mathrm{sub}_\theta$, то подгрупповой функтор subab_θ имеет в $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ два дополнения θ и $\mathrm{sub}_\theta = \mathrm{sn}$.

Следствие. *Решетка* $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ *не является модулярной.*

Доказательство. Е*сли* θ – X-нормальный подгрупповой функтор, то подрешетка

$$\{0_{\mathfrak{S}},\ \mathrm{sn},\ \theta,\ \mathrm{subab}_\theta,\ 1_{\mathfrak{S}}\}$$

решетки $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ является пентагоном. Поэтому (см., например, [3, стр. 209]) решетка $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ не является модулярной.

Замечание. В [2, теорема 4.1.10] доказано, что решетка $\mathrm{Re}\, g_m(\mathfrak{S})$ всех регулярных m-функторов является булевой. В отличие от нее решетка $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ таковой не является: будучи решеткой с дополнениями, ввиду приведенного следствия она не является дистрибутивной.

This paper investigates the properties of the lattice $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ of all solvable regular transitive subgroup functors. We prove that this lattice is a lattice with complements. We construct an example showing that $\mathrm{Re}\, g_{tr}(\mathfrak{S})$ is not a lattice with unique complements. It is noted that it is not modular.
Key words: *a finite solvable group, a regular transitive subgroup functor, a lattice, a lattice with complements, a complemented element of the lattice.*

Список литературы

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992.

2. Каморников С.Ф., Селькин М.В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 2003.

3. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А., Шеврин Л.Н., Шульгейфер Е.Г. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991.

4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

5. Carter R., Hawkes T. The $\mathfrak{F}$ -normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. Vol. 5, № 2. P. 175–202.

6. Шеметков Л.А. Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.

7. Kegel O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Bd. 30, № 3. S. 225–228.

8. Mann A. On subgroups of finite soluble groups, III / Israel J. Math. 1973. Vol. 16, № 4. P. 446–451.

Об авторах

Каморников С.Ф. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общенаучных и гуманитарных наук Международного университета «МИТСО» (Гомельский филиал), *sfkamornikov@mail.ru*

Сорокина М.М. – кандидат физико-математических наук доцент кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университет имени академика И.Г. Петровского, *mmsorokina@yandex.ru*