Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.542

О НАСЛЕДСТВЕННЫХ СВЕРХРАДИКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ

С. Йи, С. Ф. Каморников

Аннотация. Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям: 1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация; 2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$. Приводится пример наследственной сверхрадикальной формации, которая не является разрешимо насыщенной. Тем самым дается отрицательный ответ на вопрос 14.99б) из «Коуровской тетради».

DOI 10.17377/smzh.2016.57.208

Ключевые слова: конечная группа, формация, сверхрадикальная формация, разрешимая насыщенность.

1. Введение

Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, введенное в классе конечных разрешимых групп Картером и Хоуксом [1], а в произвольном случае — Л. А. Шеметковым [2], сформировало в теории конечных групп содержательное направление, связанное с изучением сверхрадикальных формаций. Интерес к ним обусловлен следующими обстоятельствами.

Во-первых, сверхрадикальные формации заслуживают внимания своей тесной связью с формациями Шеметкова — формациями, у которых критические группы являются либо группами простого порядка, либо группами Шмидта. По сути, эта связь, открытая в работах [3, 4], инициировала появление сверхрадикальных формаций, а затем на протяжении длительного периода стимулировала их развитие.

Во-вторых, сверхрадикальные формации, которые являются расширением таких объектов, как гиперрадикальные и решеточные формации, а также формации с условием Виландта (см., например, [5]), развивая собственный технический аппарат, позволяют использовать его для исследования последних.

В-третьих, открытие каждой новой сверхрадикальной формации равносильно открытию нового свойства конечных групп, представимых в виде произведения подгрупп с ограничениями на сомножители (важность изучения такой задачи отмечена, в частности, в [6]).

В-четвертых, сверхрадикальные формации интересны как объекты, двойственные радикальным формациям (формациям Фиттинга) — нормально наследственным формациям $\mathfrak{F}$, замкнутым относительно взятия произведений

Research of the first author is supported by the NNSF grant of China (Grant 11101369; 11471055).

нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Дуализм, проявляющийся уже в определениях объектов, нашел свое отражение в терминологии: рассматриваемая как самостоятельный объект формация $\mathfrak{F}$, замкнутая относительно взятия произведений $\mathfrak{F}$-субномальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, первоначально называлась $\mathfrak{F}$-*радикальной* [7], а с 2000 г. с подачи Л. А. Шеметкова [8] за ней закрепился термин «сверхрадикальная формация».

Понимание значимости сверхрадикальных формаций привело к проблеме их описания. В 1999 г. в «Коуровской тетради» [9] под номером 14.99 Л. А. Шеметковым были сформулированы две задачи.

(а) *Найти все сверхрадикальные локальные формации* (в оригинальном изложении [9] сверхрадикальные формации представлены под названием «суперрадикальные формации»).

(б) *Доказать, что всякая наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной.*

Задача 14.99(а) сегодня весьма далека от своего полного решения. Однако значительные успехи (см., например, [10, 11]), достигнутые в последние два года, позволяют надеяться на определенный прогресс уже в ближайшее время.

Что касается задачи 14.99(б), то в данной работе приводится пример наследственной сверхрадикальной формации, которая не является разрешимо насыщенной. Главная цель работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G — группа, изоморфная $Sz(2^3)$, и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{H} = \mathrm{form}(G)$, то справедливы следующие утверждения.*

(1) *Формация $\mathfrak{F}$ наследственная и сверхрадикальная.*

(2) *Формация $\mathfrak{F}$ не является разрешимо насыщенной.*

Отметим, что пример ненаследственной разрешимо насыщенной сверхрадикальной формации приведен в [12].

2. Определения и используемые результаты

Рассматриваются только конечные группы.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация;

2) любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной* (*нормально наследственной*), если она замкнута относительно взятия подгрупп (нормальных подгрупп соответственно).

Развивая принадлежащую Гашюцу концепцию локальной формации, Л. А. Шеметков и Бэр (параллельно и независимо) ввели понятие *композиционной* формации. Суть идеи состоит в рассмотрении класса $\mathfrak{F}$ групп с f-центральными рядами, где f — функция, ставящая в соответствие каждой простой (абелевой или неабелевой) группе некоторую формацию. В [13, определение IV.4.9] такие функции называются *формационными функциями Бэра* (Л. А. Шеметков в [14] называет их *композиционными экранами*).

Для характеризации композиционных формаций Бэр ввел следующее понятие. Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной*, если для любой разрешимой нормальной подгруппы N группы G из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Вопрос о соотношении композиционных и разрешимо насыщенных формаций решен следующей теоремой Бэра.

Теорема 2.1 [13, теорема IV.4.17]. *Формация является композиционной тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщенна.*

В дальнейшем G — группа, изоморфная $Sz(2^3)$, $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$ (множество всех простых делителей порядка группы $Sz(2^3)$) и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{H} = \mathrm{form}(G)$ и $\mathfrak{S}_\pi$ — формация всех разрешимых π-групп. Отметим, что неразрешимая группа H принадлежит формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\pi$-корадикал группы H представим в виде прямого произведения групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

Приведем следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [15]. Группа называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром.

Теорема 2.2 [15]. *Пусть R — примитивная группа и U — ее максимальная подгруппа, имеющая единичное ядро. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *группа R обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является абелевой и U — дополнение к N в R;*

(2) *группа R обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, подгруппа N является неабелевой и U — добавление к N в R;*

(3) *группа R обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами N и N^* и U является дополнением в группе R к подгруппам N и N^*.*

Следуя [14], класс всех примитивных групп будем обозначить через $\mathfrak{P}$. Если группа R примитивна, то полагаем, что $R \in \mathfrak{P}_i$, если группа R удовлетворяет условию (i) теоремы 2.2 $(i = 1, 2, 3)$.

При доказательстве основного результата используется следующая классификация примитивных групп из класса $\mathfrak{P}_2$.

Теорема 2.3 (см. [16, теорема 1.1.52]). *Пусть R — примитивная группа из класса $\mathfrak{P}_2$ и U — ее максимальная подгруппа, имеющая единичное ядро. Пусть*

$$\mathrm{Soc}(R) = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

где G_i — изоморфные копии некоторой простой неабелевой группы. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(1) *$n = 1$ и R — почти простая группа;*

(2) *$n > 1$ и $U \cap \mathrm{Soc}(R)$ — полная диагональная подгруппа в $\mathrm{Soc}(R)$;*

(3) *$n > 1$ и $U \cap \mathrm{Soc}(R) = D_1 \times \cdots \times D_l$ — прямое произведение $l > 1$ подгрупп таких, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, l$ подгруппа D_j является полной*

диагональной подгруппой в прямом произведении $\prod\limits_{i\in I_j} G_i$, *а* $\{I_1, \ldots, I_l\}$ *— минимальное нетривиальное* U*-допустимое разбиение множества* $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *на блоки под действием* U *на* I*;*

(4) $n > 1$, *проекция подгруппы* $U \cap \mathrm{Soc}(R)$ *на первую компоненту* G_1 *группы* $\mathrm{Soc}(R)$ *является нетривиальной собственной подгруппой группы* G_1 *и*

$$1 \neq U \cap \mathrm{Soc}(R) = (U \cap G_1) \times \cdots \times (U \cap G_n);$$

(5) $n > 1$ *и* $U \cap \mathrm{Soc}(R) = 1$.

Мы будем опираться также на следующий известный факторизационный результат.

Теорема 2.4 [17]. *Если порядок группы* R *не делится на* 3 *и* $R = AB$, *где* A *и* B *— разрешимые подгруппы, то группа* R *также разрешима.*

3. Доказательство теоремы

Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

Шаг 1. *Формация* $\mathfrak{F}$ *наследственна.* Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не наследственна. Тогда существует принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ группа, у которой имеется собственная подгруппа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Выберем среди таких групп группу R наименьшего порядка. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и в группе R имеется такая подгруппа U, что $U \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что U — максимальная подгруппа группы R.

Пусть R — простая неабелева группа. Тогда $R \simeq Sz(2^3)$. Хорошо известно, что все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы. Значит, U — разрешимая π-группа и $U \in \mathfrak{F}$; противоречие. Поэтому далее полагаем, что R — непростая группа.

Если K — минимальная нормальная подгруппа группы R, то ввиду выбора группы R имеем $UK/K \simeq U/U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 — минимальная нормальная подгруппа группы R, отличная от подгруппы K, то аналогично показывается, что $U/U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$U \simeq U/(U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$. Значит, K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R.

Если группа R разрешима, то утверждение очевидно. Поэтому полагаем далее, что $R^{\mathfrak{S}_\pi} \neq 1$.

Так как $R \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{S}_\pi$-корадикал $R^{\mathfrak{S}_\pi}$ группы R представим в виде прямого произведения групп, изоморфных G. Поскольку K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $R^{\mathfrak{S}_\pi} \in \mathfrak{H} = \mathrm{form}(G)$, то $K = R^{\mathfrak{S}_\pi}$. Очевидно, что R является примитивной группой из класса $\mathfrak{P}_2$. Пусть

$$\mathrm{Soc}(R) = K = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n,$$

где $G_i \simeq G$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если $K \subseteq U$, то из $U/K \in \mathfrak{S}_\pi$ имеем $U \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, подгруппа U не содержит K. Отсюда и из максимальности подгруппы U в R имеем, что $R = UK$ и $\mathrm{Core}_R(U) = 1$. По теореме 2.3 возможны пять различных случаев. Рассмотрим каждый из них.

Случай 1. Пусть $n = 1$ и R — почти простая группа. Тогда $U \cap K$ — собственная подгруппа простой группы $K \simeq Sz(2^3)$. Так как все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы, $U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда и из

$$U/U \cap K \simeq UK/K = R/K \in \mathfrak{S}_\pi$$

имеем $U \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = D$ — полная диагональная подгруппа в K. В этом случае $U = N_R(D)$. Так как $U/D \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi$ и $D \simeq Sz(2^3)$, то $U \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию.

Случай 3. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = D_1 \times \dots \times D_l$ — прямое произведение $l > 1$ подгрупп таких, что для каждого $j = 1, 2, \dots, l$ подгруппа D_j является полной диагональной подгруппой в прямом произведении $\prod\limits_{i \in I_j} G_i$, а $\{I_1, \dots, I_l\}$ — минимальное нетривиальное U-допустимое разбиение множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на блоки под действием U на I. Как в случае 2, имеем

$$U/D_1 \times \dots \times D_l \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi,$$

а значит, $U \in \mathfrak{F}$. Снова приходим к противоречию с условием $U \notin \mathfrak{F}$.

Случай 4. Пусть $n > 1$ и проекция подгруппы $U \cap K$ на первую компоненту G_1 группы $K = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ является нетривиальной собственной подгруппой группы G_1. В этом случае

$$1 \neq U \cap K = (U \cap G_1) \times \dots \times (U \cap G_n).$$

Так как по теореме Томпсона все собственные подгруппы группы $Sz(2^3)$ разрешимы, $U \cap K = (U \cap G_1) \times \dots \times (U \cap G_n) \in \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда и из $U/U \cap K \in \mathfrak{S}_\pi$ имеем $U \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что также невозможно.

Случай 5. Пусть $n > 1$ и $U \cap K = 1$. В этом случае $U \simeq R/K \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ наследственна.

Шаг 2. *Формация $\mathfrak{F}$ сверхрадикальна.* Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не сверхрадикальна. Тогда по определению сверхрадикальной формации существуют не принадлежащие $\mathfrak{F}$ группы, факторизуемые $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами. Выберем среди них группу R наименьшего порядка. Тогда R обладает такими $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B, что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B — максимальные подгруппы группы R. Действительно, так как подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в R, существует максимальная цепь подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k = R$$

такая, что $A_i^{\mathfrak{F}} \subseteq A_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Ввиду тождества Дедекинда имеем $A_{k-1} = A(A_{k-1} \cap B)$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $A_{k-1} \cap B \in \mathfrak{F}$. Кроме того, подгруппы A и $A_{k-1} \cap B$ являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в A_{k-1}. Значит, ввиду выбора группы R подгруппа A_{k-1} принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Итак, будем считать далее, что A и B — $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы R. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппы следует, что $1 \neq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы R. Ввиду выбора группы R имеем $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$.

Из определения формации $\mathfrak{F}$ и условия $L = R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \in \mathfrak{F}$ вытекает, что L либо p-группа, где $p \in \pi$, либо прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$.

1. Пусть L — прямое произведение групп, изоморфных $Sz(2^3)$. Так как L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R, то $C_R(L) = 1$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то из $C_R(L) = 1$ и $L \subseteq A$ следует, что $A^{\mathfrak{S}_\pi} = L$. Аналогично показывается, что $B^{\mathfrak{S}_\pi} = L$.

Таким образом, $R/L = (A/L)(B/L)$, где A/L и B/L — разрешимые подгруппы. Так как порядок группы R/L не делится на 3, ввиду теоремы 2.4 группа R/L разрешима. Отсюда и из строения подгруппы L следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

2. Пусть L — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Тогда из единственности минимальной нормальной подгруппы L, а также включений $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и строения формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $A \in \mathfrak{S}_\pi$ и $B \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как порядок группы R не делится на 3, ввиду теоремы 2.4 R — разрешимая π-группа, т. е. $R \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ сверхрадикальна.

Шаг 3. *Формация $\mathfrak{F}$ не является композиционной.* Предположим, что $\mathfrak{F}$ композиционная. Тогда ввиду леммы 1.4 из [18] она обладает таким композиционным экраном f, что

1) $f(G) = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$;

2) $f(p) = \mathfrak{S}_\pi$ для всех $p \in \pi = \{2, 5, 7, 13\}$;

3) $f(p)$ — пустая формация для всех $p \notin \pi$;

4) $f(H)$ — пустая формация для всех простых неабелевых групп H, которые не изоморфны G.

Пусть $M(G)$ — мультипликатор Шура группы G. Как отмечено, например, в [19, теорема 4.1], $M(G) \cong Z_2 \times Z_2$. Пусть $\widehat{G}$ — универсальная накрывающая группы G. Очевидно, группа $\widehat{G}$ принадлежит композиционной формации, обладающей экраном f. Но тогда ввиду того, что формация $\mathfrak{F}$ композиционная с экраном f, имеем $\widehat{G} \in \mathfrak{F}$. Однако это не так. Получили противоречие. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ не композиционная.

Шаг 4. *Формация $\mathfrak{F}$ не является разрешимо насыщенной.* Так как формация $\mathfrak{F}$ не композиционная, ввиду теоремы 2.1 она не является разрешимо насыщенной формацией. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5, N 2. P. 175–202.

2. *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.

3. *Ballester-Bolinches A.* A note on saturated formations // Arch. Math. 1992. V. 58, N 2. P. 110–113.

4. *Семенчук В. Н.* Характеризация $\check{S}$-формаций // Вопросы алгебры. 1992. № 7. С. 103–107.

5. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 2003.

6. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.

7. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.

8. *Семенчук В. Н., Шеметков Л. А.* Сверхрадикальные формации // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 5. С. 24–26.
9. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010.
10. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 97–108.
11. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N.* On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups // J. Algebra. 2014. V. 403. P. 69–76.
12. *Каморников С. Ф.* Об одном примере гиперрадикальной формации // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 3. С. 61–64.
13. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
15. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Ill. J. Math. 1957. V. 1, N 2. P. 115–187.
16. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
17. *Сыскин С. А.* Об одном вопросе Р. Бэра // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 679–681.
18. *Каморников С. Ф., Шеметков Л. А.* О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 5. С. 493–513.
19. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

Статья поступила 31 декабря 2014 г.

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Departament of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
Международный университет МИТСО,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru