Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

М. С. НИКОЛЬСКИЙ

ИДЕАЛЬНО НАБЛЮДАЕМЫЕ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 13 X 1969)

§ 1. В n-мерном эвклидовом пространстве R^n происходит движение вектора x, удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица размерности $n \times n$, u — управляющий вектор размерности $p \geqslant 1$ из эвклидова пространства R^p, B — прямоугольная матрица размерности $p \times n$. Предполагается, что управление $u = u(t)$ является измеримой, ограниченной по модулю функцией на отрезке $[0, \Delta]$, где $\Delta > 0$.

Имеется наблюдатель, которому известны:

а) динамические возможности объекта x — матрицы A, B;

б) прямоугольная матрица G размерности $n \times q$ ненулевого ранга и векторная функция

$$y(t) = Gx(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta. \tag{2}$$

Задача наблюдателя состоит в том, чтобы однозначно восстановить вектор $x(0) = x_0$ по функции $y(\cdot)$ *.

Системы (1), (2), для которых наблюдатель может однозначно восстановить вектор $x(0) = x_0$ по любой возможной функции $y(\cdot)$, мы назовем идеально наблюдаемыми. Остальные системы назовем неидеально наблюдаемыми.

В теории наблюдаемости Калмана (см. ([1, 2])) предполагается, что наблюдателю, помимо информации, указанной в пунктах а), б), известно еще управление $u(\cdot)$ объекта x. Нетрудно видеть, что из идеальной наблюдаемости системы (1), (2) следует ее полная наблюдаемость по Калману (см. ([1])). Обратное, вообще говоря, неверно (см. § 6, пример 1).

§ 2. В работе строится алгоритм, позволяющий узнать по матрицам A, B, G, является ли система (1), (2) идеально наблюдаемой или нет.

Этот алгоритм состоит из вычисления конечного числа (не более $p + 1$) рангов постоянных матриц и решения конечного числа (не более p) систем линейных алгебраических уравнений. Из него, в частности, следует, что свойство системы (1), (2) быть идеально наблюдаемой не зависит от величины отрезка наблюдения $\Delta > 0$.

Теорема 1. *Система* (1), (2) *идеально наблюдаема тогда и только тогда, когда система* $\dot{x} = (A + BM)x$, $y = Gx$ *(где M — произвольная матрица размерности $n \times p$) является вполне наблюдаемой по Калману* (см. ([1])). *Система* (1), (2) *неидеально наблюдаема тогда и только тогда, когда существует матрица M_0 размерности $n \times p$ такая, что система* $\dot{x} = (A + BM_0)x$, $y = Gx$ *не является вполне наблюдаемой.*

§ 3. Пусть система (1), (2) идеально наблюдаема, тогда на функциях $y(t) = Gx(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$, где $x(t)$ — решение уравнения (1), определен оператор F, обладающий свойством $Fy(\cdot) = x_0$. Нетрудно видеть, что опе-

* Точка в скобках здесь и далее означает, что функция рассматривается не в точке, а на всем отрезке наблюдения $[0, \Delta]$.

ратор F обладает свойством линейности, т. е. $F[\lambda_1 y_1(\cdot)+\lambda_2 y_2(\cdot)]=\lambda_1 F y_1(\cdot)+\lambda_2 F y_2(\cdot)$, где λ_1, λ_2 — произвольные числа.

Обозначим символом $\mathfrak{M}_P$ совокупность функций $y(\cdot)$, обладающих свойством: одно из допустимых управлений $u(\cdot)$, порождающих функцию $y(\cdot)$, удовлетворяет условию

$$u(t)\in P,\quad 0\leqslant t\leqslant\Delta, \tag{3}$$

где P — выпуклый компакт из R^p. Обозначим через F_P сужение оператора F на $\mathfrak{M}_P$. Положим $\|y(\cdot)\|_C=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\Delta}|y(t)|$, где $|y(t)|$ означает модуль q-мерного вектора $y(t)$.

Теорема 2. *Оператор F_P равномерно непрерывен на $\mathfrak{M}_P$ в метрике пространства $C[0,\Delta]$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ из $\mathfrak{M}_P$, удовлетворяющих условию $\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_C<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|F_P y_1(\cdot)-F_P y_2(\cdot)|<\varepsilon$.*

Положим $\|y(\cdot)\|_{L_2}=\left(\int\limits_0^\Delta|y(s)|^2\,ds\right)^{1/2}$.

Теорема 3. *Оператор F_P равномерно непрерывен на $\mathfrak{M}_P$ в метрике пространства $L_2[0,\Delta]$, т. е. для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $y_1(\cdot)$, $y_2(\cdot)$ из $\mathfrak{M}_P$, удовлетворяющих условию $\|y_1(\cdot)-y_2(\cdot)\|_{L_2}<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство*

$$|F_P y_1(\cdot)-F_P y_2(\cdot)|<\varepsilon.$$

Теоремы 2, 3 дают важную информацию о свойствах оператора F и представляют интерес для практических приложений.

§ 4. Пусть система (1), (2) идеально наблюдаема. Возникает задача об эффективном вычислении оператора F.

Мы будем предполагать, что наблюдатель имеет дополнительную информацию: одно из допустимых управлений $u(\cdot)$, порождающих функцию $y(\cdot)$, удовлетворяет условию (3), причем выпуклый компакт P известен наблюдателю.

Такая постановка задачи наблюдения является естественной для дифференциальных игр преследования с неполной информацией, в которых догоняющий (он же и наблюдатель) информирован о динамике убегающего, т. е. знает матрицы A, B и множество P, но относительно вектора $x(t)$ он знает лишь его «проекцию» $y=Gx(t)$.

Для решения поставленной задачи рассматривается вспомогательная задача минимизации функционала

$$I(u(\cdot))=\int\limits_0^\Delta|w(t)-Gx(t)|^2\,dt, \tag{4}$$

(где $w(\cdot)$ — произвольная q-мерная векторная функция из $L_2[0,\Delta]$) на свободных траекториях уравнения (1), причем $u\in P$. Доказывается, что существует минимум функционала (4) и что он достигается на единственной траектории $\tilde{x}(\cdot)$ уравнения (1). Таким образом, на элементах $w(\cdot)\in L_2[0,\Delta]$ определен, вообще говоря, нелинейный оператор F_P': $F_P'w(\cdot)=\tilde{x}(\cdot)$. Введем еще оператор F^2, который определен на траекториях уравнения (1) равенством $F^2x(\cdot)=x(0)$. Теперь мы определим на элементах $w(\cdot)\in L_2[0,\Delta]$ оператор $F_P{}^3$: $F_P{}^3w(\cdot)=F^2F_P'w(\cdot)=\tilde{x}(0)$.

Нетрудно видеть, что, если $\hat{w}(\cdot)=y(\cdot)\in\mathfrak{M}_P$, *то* $F_P{}^3\hat{w}(\cdot)=x(0)=x_0$. *Таким образом, оператор $F_P{}^3$ на $\mathfrak{M}_P$ совпадает с F_P, и важно научиться эффективно вычислять оператор $F_P{}^3$ на произвольных $w(\cdot)\in L_2[0,\Delta]$.*

Сначала рассмотрим случай, когда $w(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой на $[0,\Delta]$. Доказывается, что принцип максимума Л. С. Понтрягина (см. ([3])) является необходимым и достаточным условием в задаче минимизации функционала (4) на свободных траекториях уравнения (1). Используя этот факт, доказывается, что метод последовательных приближений, изложенный в § 4 работы ([4]), может быть применен для эффективного вычисления $\tilde{x}(\cdot) = F_P' w(\cdot)$. Таким образом, в случае непрерывной дифференцируемости функции $w(\cdot)$ мы имеем эффективный метод для вычисления $F_P' w(\cdot)$, а значит и для $F_P{}^3 w(\cdot)$.

Для вычисления $F_P{}^3 w(\cdot)$ в случае произвольной $w(\cdot) \in L_2[0, \Delta]$ можно поступить так.

Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций $w_n(\cdot)$ таких, что $\|w_n(\cdot) - w(\cdot)\|_{L_2} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Теорема 4. *Оператор $F_P{}^3$ непрерывен на любом элементе $\hat{w}(\cdot) \in L_2[0, \Delta]$: по данному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любой $w(\cdot) \in L_2[0, \Delta]$, удовлетворяющей неравенству $\|w(\cdot) - \hat{w}(\cdot)\|_{L_2} < \delta(\varepsilon)$, имеет место неравенство $|F_P{}^3 w(\cdot) - F_P{}^3 \hat{w}(\cdot)| < \varepsilon$.*

В силу теоремы 4 последовательность векторов $\tilde{x}_n(0) = F_P{}^3 w_n(\cdot)$ сходится к вектору $\tilde{x}(0) = F_P{}^3 w(\cdot)$.

§ 5. В этом параграфе мы рассмотрим задачу о наблюдении системы (1) по функции

$$v(t) = Gx(t) + \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta. \tag{5}$$

Функция $\omega(\cdot)$ предполагается неизвестной наблюдателю (ее называют помехой), ему известно лишь, что $\omega(\cdot) \in L_2[0, \Delta]$ и что $\|\omega(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \mu$.

Будем рассматривать задачу в предположении о наличии у наблюдателя дополнительной информации, о которой говорилось в начале § 4. Система (1), (2) предполагается идеально наблюдаемой.

Положим $\tilde{x}(\cdot) = F_P{}^3 v(\cdot)$. Легко видеть, что $\|v(\cdot) - G\tilde{x}(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \mu$, отсюда и из формулы (5) вытекает, что

$$\|Gx(\cdot) - G\tilde{x}(\cdot)\|_{L_2} \leqslant 2\mu. \tag{6}$$

Из этого неравенства и из теоремы 3 следует, что $|\tilde{x}(0) - x(0)| \to 0$ при $\mu \to 0$. Для более точного изучения характера зависимости от μ степени приближения вектором $\tilde{x}(0)$ вектора $x(0)$ введем скалярную функцию $g(r)$. Для этого рассмотрим семейство функций $z(t, x)$ вида

$$z(t, x) = Ge^{tA}x + \int_0^t Ge^{(t-s)A} Bu(s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta,$$

где $u(s) \in Q = P - P$ (знак — означает алгебраическую разность множеств). Множество Q, как нетрудно видеть, является выпуклым компактом. Положим

$$f(x) = \min_{u(\cdot)} \|z(\cdot, x)\|_{L_2}, \quad g(r) = \min_{|x|=r} f(x).$$

Доказывается, что $g(r)$ — непрерывная по r функция, причем $g(0) = 0$ и $g(r) > 0$ при $r > 0$. Доказывается, что $g(r)$ монотонно растет вместе с r. Поэтому существует непрерывная обратная функция $r = r(g)$, удовлетворяющая условию $g(r(g_0)) = g_0$. Из неравенства (6) выводим, что вектор $\tilde{x}(0)$ приближает вектор $x(0)$ с точностью до $\varepsilon(\mu) = r(2\mu)$, причем $\varepsilon(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Заметим, что функция $f(x)$ эффективно вычислима с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. ([3])), так что функция $g(r) = \min_{|x|=r} f(x)$ является эффективно вычислимой.

§ 6. Примеры.

Пример 1.

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad y_1 = x_1.$$

Эта система неидеально наблюдаема, хотя и является вполне наблюдаемой по Калману (см. ([1])).

Пример 2.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y_1 = x_1.$$

Эта система является идеально наблюдаемой

Пример 3.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + u, \quad y_1 = x_1,$$

где $\alpha = \text{const}$. Эта система является идеально наблюдаемой.

В заключение я хочу отметить, что постановка задачи об идеальном наблюдении принадлежит Л. С. Понтрягину. Приношу глубокую благодарность Л. С. Понтрягину и Е. Ф. Мищенко за постоянное внимание к моей работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. E. Kalman, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 5, № 1, 102 (1960). [2] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, М., 1968. [3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [4] Ю. А. Житенева, Г. Н. Мильштейн, Диф. уравн., 1, № 12, 2081 (1967).