

УДК 517.55:517.948.32

МАТЕМАТИКА

И. Б. СИМОНЕНКО

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 19 I 1971)

1°. Пусть $\dot{E}_2$ — плоскость, E_2 — ее пополнение одной бесконечно удаленной точкой; a_0, a_1, a_2, a_{12} — непрерывные комплексные функции, определенные на E_2 .

Пусть оператор $S (\in \text{Hom} [L_p(E_2), L_p(E_2)], * \quad 1 < p < +\infty)$ имеет вид

$$(Sf)(x) = a_0(x)f(x) + \frac{a_1(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1, x_2)}{y_1 - x_1} dy_1 + \\ + \frac{a_2(x)}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1, y_2)}{y_2 - x_2} dy_2 + \frac{a_{12}(x)}{(\pi i)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y) dy_1 dy_2}{(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)},$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2).$$

Теорема 1. 1) Для того чтобы оператор S был оператором Нётера, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x (\in E_2)$ выполнялись условия

$$a_0(x) \pm a_1(x) + a_2(x) \pm a_{12}(x) \neq 0, \\ a_0(x) \pm a_1(x) - a_2(x) \mp a_{12}(x) \neq 0; \quad (1)$$

2) Если указанные условия выполнены и $f (\in L_p)$ — решение уравнения

$$Sf = g, \quad g \in L_p, \quad 1 < p_1 < +\infty,$$

то $f \in L_p$;

3) Индекс оператора S равен нулю.

2°. Пусть C_2 — пространство двух комплексных переменных, E_2 — вещественная плоскость, $\dot{E}_2$ — ее пополнение одной бесконечно удаленной точкой.

Пусть $G^{++}, G^{+-}, G^{-+}, G^{--}$ — комплексные непрерывные функции, определенные на E_2 . Обозначим через $\Gamma^{++}, \Gamma^{+-}, \Gamma^{-+}, \Gamma^{--}$ трубчатые области $\text{Im } z_1 > 0, \text{Im } z_2 > 0; \text{Im } z_1 > 0, \text{Im } z_2 < 0; \text{Im } z_1 < 0, \text{Im } z_2 > 0; \text{Im } z_1 < 0, \text{Im } z_2 < 0$ соответственно. Через $H_p^{++}, \dots$ обозначим пространства функций, аналитических в соответствующих областях и представимых двойным интегралом Коши (по остоу E_2) с плотностью из $L_p(E_2)$.

Поставим задачу (А): найти аналитические в соответствующих областях функции $\Phi^{++}, \Phi^{+-}, \Phi^{-+}, \Phi^{--}$, принадлежащие соответствующим пространствам $H_p^{++}, \dots$ ($1 < p < +\infty$), по граничному условию

$$G^{++}(x)\Phi^{++}(x) + G^{+-}(x)\Phi^{+-}(x) + G^{-+}(x)\Phi^{-+}(x) + \\ + G^{--}(x)\Phi^{--}(x) = g(x), \quad (A)$$

* $\text{Hom} (B_1, B_2)$ — пространство линейных операторов, действующих из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 .

где g — заданная функция из пространства $L_p(E_2)$, $\Phi^{++}(x), \dots$ — угловые предельные значения функций $\Phi^{++}, \dots$ на острове E_2 .

Теорема 2. 1) Для того чтобы поставленная задача удовлетворяла теории Нётера, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x (\in E_2)$ выполнялись условия

$$G^{\pm+}(x) \neq 0, \quad G^{\pm-}(x) \neq 0; \quad (2)$$

2) Если условия (2) выполнены, $\Phi^{++}, \dots$ — решение задачи и $g \in L_p$, $(1 < p_1 < +\infty)$, то $\Phi^{++}, \dots \in L_{p_1}$;

3) Индекс задачи равен нулю.

3°. Наметим доказательство сформулированных утверждений. Прежде всего заметим, что теоремы 1 и 2 вытекают одна из другой и теорема 2 при $p = 2$ доказана в (1), § 4, 3°.

Исследование в случае $p = 2$ основано на том, что оператор S подобен оператору составной свертки (см. (1), § 3, (2)), который можно исследовать при помощи локальных методов, изложенных в работах (3, 4). Подобие осуществляется преобразованием Фурье. Сам же оператор S не является оператором локального типа и указанные методы к нему неприменимы.

Эти обстоятельства, а также невозможность осуществить подобие в случае $p \neq 2$ вызывают дополнительные трудности, которые преодолеваются следующим образом. В дополнение к результатам (1), § 4, 3° для оператора $\hat{S} = FSF^{-1}$ (F — преобразование Фурье, $p = 2$) в явном виде строится регуляризатор $\hat{N}$. Оператор $N = F^{-1}\hat{N}F$, являющийся регуляризатором оператора S при $p = 2$, оказывается ограниченным оператором и в пространствах L_p при $p > 1$. При доказательстве этого утверждения используются результаты работы (5).

Отсюда по теореме М. А. Красносельского (см. (6)) заключаем, что N — регуляризатор оператора S для $p > 1$.

Это доказывает достаточность условий (1), (2).

Необходимость в основном доказывалась так же, как и теорема 1.3 работы (1), хотя некоторые детали доказательства существенно изменяются.

4°. Теоремы 1, 2 остаются в силе, если исследование проводить в пространствах Орлича (см. (7)), где M — N -функция, удовлетворяющая условию

$$1 < \alpha \leq uM'(u) / M(u) \leq \beta < +\infty, \quad 0 < u < +\infty; \quad \alpha, \beta = \text{const.}$$

Этот результат получается на основании работ (8, 9).

В заключение заметим, что некоторые краевые задачи аналитических функций многих переменных и соответствующие интегральные уравнения изучались в работах (10–12) методами, применявшимися ранее в одномерном случае (13, 14). К сожалению, эти методы применимы к задаче (A) лишь при сильных дополнительных ограничениях на коэффициенты.

Мотивировка изучения краевых задач аналитических функций многих переменных содержится, например, в (10).

Ростовский государственный
университет

Поступило
25 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 74 (116), № 2, 298 (1967). ² И. Б. Симоненко, ДАН, 176, № 6, 1251 (1967). ³ И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, в. 3, 567 (1965). ⁴ И. Б. Симоненко, ДАН, 158, № 4, 790 (1964). ⁵ И. Б. Симоненко, ДАН, 124, № 2, 278 (1959). ⁶ М. А. Красносельский, Вып. ДАН, 131, № 2, 246 (1960). ⁷ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, ДАН, 151, № 6, 1288 (1963). ⁸ И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 63 (105), № 4, 536 (1964). ⁹ И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 807 (1965). ¹⁰ В. С. Владимиров, Тр. Груз. политехн. инст., № 3 (101), 1965. ¹¹ С. К. Токликишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. ¹² Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963.