Том 19 № 3 2013

УДК 512.542.4+512.542.6

О ПОДГРУППАХ, ПОКРЫВАЮЩИХ ТОЛЬКО $\mathfrak{F}$-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ГЛАВНЫЕ ФАКТОРЫ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С. Ф. Каморников, О. Л. Шеметкова

Элемент x конечной группы G авторы называют $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным, если каждый главный фактор A/B группы G, для которого $x \in A\backslash B$, является $\mathfrak{F}$-центральным. Исследуется связь $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральных элементов группы G с ее главными факторами. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, изучаются свойства подгрупп, покрывающих все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирующих все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G (такие подгруппы авторы называют $\mathfrak{F}$-изоляторами). Устанавливается связь $\mathfrak{F}$-изоляторов с $\mathfrak{F}$-нормализаторами группы G.

Ключевые слова: конечная группа, насыщенная формация, $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент, $\mathfrak{F}$-нормализатор, $\mathfrak{F}$-изолятор.

S. F. Kamornikov, O. L. Shemetkova. On subgroups that cover only $\mathfrak{F}$-central chief factors in finite groups.

The authors call an element x of a finite group G $Q\mathfrak{F}$-supercentral if every chief factor A/B of G for which $x \in A\backslash B$ is $\mathfrak{F}$-central. The connection between $Q\mathfrak{F}$-supercentral elements of G and its chief factors is investigated. In the case when $\mathfrak{F}$ is a nonempty saturated formation, the properties of subgroups that cover all $\mathfrak{F}$-central chief factors of G and isolate all $\mathfrak{F}$-eccentric chief factors are investigated (the authors call these subgroups $\mathfrak{F}$-isolators). The connection between $\mathfrak{F}$-isolators and $\mathfrak{F}$-normalizers of G is established.

Keywords: finite group, saturated formation, $Q\mathfrak{F}$-supercentral element, $\mathfrak{F}$-normalizer, $\mathfrak{F}$-isolator.

Посвящается А. А. Махневу в связи с его шестидесятилетием

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп. Главный фактор A/B группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если полупрямое произведение $[A/B](G/C_G(A/B))$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Если же $[A/B](G/C_G(A/B))$ не принадлежит $\mathfrak{F}$, то главный фактор A/B называется $\mathfrak{F}$-*эксцентральным*.

Л.А. Шеметковым введена концепция $Q\mathfrak{F}$-центрального элемента: элемент x группы G называется $Q\mathfrak{F}$-*центральным*, если в G существует такой $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор A/B, что $x \in A\backslash B$ (см. [1]). Единичный элемент по определению считается $Q\mathfrak{F}$-центральным.

В данной работе мы развиваем концепцию $Q\mathfrak{F}$-центрального элемента. Мы вводим понятие $Q\mathfrak{F}$-сверхцентрального элемента, которое используется для изучения $\mathfrak{F}$-подгрупп, обладающих свойством покрытия-изолирования.

Определение 1. Элемент x группы G называется $Q\mathfrak{F}$-*сверхцентральным*, если выполняется одно из следующих двух равносильных условий:

1) каждый главный фактор A/B группы G, для которого $x \in A\backslash B$, является $\mathfrak{F}$-центральным;

2) каждый главный фактор группы G вида $\langle x^G\rangle/B$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Единичный элемент по определению считается $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным.

Здесь через $\langle x^G\rangle$ обозначается нормальное замыкание элемента x в группе G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы G, которые содержат элемент x.

Определение 2. Элемент x группы G называется Q-*сверхцентральным*, если он является $Q\mathfrak{N}$-сверхцентральным, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп (это значит, что все главные факторы группы G вида $\langle x^G\rangle/B$ являются центральными).

Отметим, что каждый $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент группы G является $Q\mathfrak{F}$-центральным. Обратное неверно. Пусть G — внешнее прямое произведение знакопеременной группы A_4 и циклической группы $\langle y\rangle$ порядка 2. Рассмотрим элемент $h = (x, y) \in G$, где x — элемент группы A_4, имеющий порядок 3. Простая проверка показывает, что: 1) $\langle h^G\rangle = G$;

2) $h \in G\backslash(V \times \langle y\rangle)$, где V — подгруппа из A_4 порядка 4; 3) $h \in G\backslash(A_4 \times 1)$; 4) главный фактор $G/(V \times \langle y\rangle)$ группы G является $\mathfrak{N}_3$-центральным, где $\mathfrak{N}_3$ — формация всех 3-групп; 5) главный фактор $G/(A_4 \times 1)$ группы G является $\mathfrak{N}_3$-эксцентральным. Таким образом, элемент h является $Q\mathfrak{N}_3$-центральным в группе G, но не является $Q\mathfrak{N}_3$-сверхцентральным.

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [2; 3].

Нам потребуются некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов.

Определение 3. Пусть H — подгруппа, а A/B — нормальный фактор группы G. Говорят, что:

1) H покрывает фактор A/B, если $HB \supseteq A$;

2) H изолирует фактор A/B, если $H \cap A \subseteq B$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Если все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, то все элементы подгруппы HN/N являются $Q\mathfrak{F}$-свехцентральными в G/N.*

Доказательство. Пусть $h \in H$. Тогда любой главный фактор $\langle h^G\rangle/B$ группы G является $\mathfrak{F}$-центральным. Рассмотрим элемент hN группы G/N. Если $hN = N$, то элемент hN является $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным в G/N как единичный элемент группы G/N.

Значит, h не содержится в N. Предположим, что $N \subseteq \langle h^G\rangle$. Тогда $N \subset \langle h^G\rangle$. Пусть $(\langle h^G\rangle/N)/(B/N)$ — главный фактор группы G/N. Ввиду G-изоморфизма $(\langle h^G\rangle/N)/(B/N) \cong \langle h^G\rangle/B$ имеем, что фактор $(\langle h^G\rangle/N)/(B/N)$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Пусть N не содержится в $\langle h^G\rangle$. Рассмотрим главный фактор $(\langle h^G\rangle N/N)/\ (B/N)$ группы G/N. Так как $\langle h^G\rangle N = \langle h^G\rangle B$, то из равенства

$$(\langle h^G\rangle N/N)/(B/N) = (\langle h^G\rangle B/N)/(B/N) \cong \langle h^G\rangle/\langle h^G\rangle \cap B$$

следует, что главный фактор $(\langle h^G\rangle N/N)/(B/N)$ является $\mathfrak{F}$-центральным.

Итак, любой главный фактор группы G/N, имеющий вид

$$\langle hN^{G/N}\rangle/(B/N) = (\langle h^G\rangle N/N)/(B/N),$$

является $\mathfrak{F}$-центральным, а значит, элемент hN является $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральным в G/N. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый непустой класс групп, H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Если A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G, то H изолирует A/B.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Тогда в G найдется такая подгруппа H, что все ее элементы $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G, но она не изолирует некоторый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор A/B группы G.

Рассмотрим группу G/B. Ввиду леммы 1 все элементы из HB/B являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G/B, а A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G/B. Если $B \neq 1$, то из $|G/B| < |G|$ следует, что подгруппа HB/B изолирует A/B, т. е. $(HB/B)\cap(A/B) = 1$. Отсюда $HB\cap A = B$, а значит, $(H\cap A)B = B$ и $H\cap A \subseteq B$. Следовательно, H изолирует A/B. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Итак, $B = 1$, A — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G и $H\cap A \neq 1$. Пусть $h \in H\cap A$, $h \neq 1$. Так как все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, то из определения $Q\mathfrak{F}$-сверхцентрального элемента следует, что $\langle h^G\rangle = A$ — $\mathfrak{F}$-центральная минимальная нормальная подгруппа группы G, что невозможно. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Замечание 1. Пусть h — инволюция группы $G = A_4$ и $H = \langle h \rangle$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп, то все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G, но подгруппа H не изолирует и не покрывает минимальную нормальную подгруппу из G. Таким образом, подгруппа H, все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G, в общем случае может не покрывать и не изолировать главные факторы группы G. В то же время справедливо следующее простое утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая подформация формации всех сверхразрешимых групп и H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Если A/B — главный фактор группы G, то H либо изолирует, либо покрывает A/B.*

Доказательство. Если A/B — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G, то ввиду леммы 2 H изолирует A/B. Если A/B — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G, то $|A/B| = p$ — простое число (см., например, [2, с. 93]). В этом случае, очевидно, H либо изолирует, либо покрывает A/B. Предложение доказано.

Следуя [3], подгруппу H группы G будем называть CAP-*подгруппой*, если она либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G. В этом случае говорят также, что подгруппа H *обладает свойством покрытия-изолирования* в группе G.

Прямым следствием предложения 1 является следующий результат.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая подформация формации всех сверхразрешимых групп и H — подгруппа группы G, причем все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G. Тогда H обладает свойством покрытия-изолирования.*

Определение 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*изолятором* группы G, если H покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G.

Определение 5. Подгруппа H называется *изолятором* группы G, если она является $\mathfrak{N}$-изолятором, где $\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп (это значит, что H покрывает все центральные и изолирует все эксцентральные главные факторы группы G).

Замечание 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Так как при любом гомоморфизме группы G $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы группы G переходят в $\mathfrak{F}$-центральные, а $\mathfrak{F}$-эксцентральные — в $\mathfrak{F}$-эксцентральные, то HN/N — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G/N для любого $\mathfrak{F}$-изолятора H группы G и любой ее нормальной подгруппы N. Для любого $\mathfrak{F}$-изолятора H группы G справедливо равенство $G = HG^{\mathfrak{F}}$.

Напомним, что наибольшая нормальная подгруппа группы G, все G-главные факторы которой $\mathfrak{F}$-центральны в G, называется $\mathfrak{F}$-*гиперцентром* группы G и обозначается через $Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Теорема. *Для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *все $\mathfrak{F}$-изоляторы группы G имеют одинаковый порядок*;

2) *каждый $\mathfrak{F}$-изолятор группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$*;

3) *если H — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G, то:*

3a) *все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G*;

3b) *H не является собственной подгруппой ни в одной подгруппе, все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G*;

3c) $Core_G(H) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ — *$\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G*;

3d) *если $H \trianglelefteq G$, то $H = Z_{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. 1) Пусть $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ — некоторый главный ряд группы G, причем $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов этого ряда. Так как $\mathfrak{F}$-изолятор H группы G по определению покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G, то ввиду [3, лемма A.1.7] справедливо равенство $|H| = \prod_{i\in I} |A_i/A_{i-1}|$. Итак, любой $\mathfrak{F}$-изолятор группы G имеет порядок, равный $\prod_{i\in I} |A_i/A_{i-1}|$.

2) Применим индукцию по порядку группы G. Пусть H — $\mathfrak{F}$-изолятор группы G и N — ее минимальная нормальная подгруппа.

Так как по индукции для группы G/N теорема верна, то $HN/N \in \mathfrak{F}$. Если N — $\mathfrak{F}$-центральная минимальная нормальная подгруппа группы G, то H покрывает N, а значит, $N \subseteq H$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то ввиду [3, теорема IV.4.6] найдется такая формационная функция f, что $\mathfrak{F} = LF(f)$, причем $f(q) = \mathfrak{N}_q f(q)$ и $f(q) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых чисел $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Так как минимальная нормальная подгруппа N $\mathfrak{F}$-центральна в G, то $G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого числа p, делящего порядок подгруппы N. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а значит, из $G = HG^{\mathfrak{F}}$ имеем $HC_G(N) = G$. Если N — неабелева группа, то из того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, имеем $C_G(N) = 1$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $H = G \in \mathfrak{F}$. Поэтому полагаем далее, что N — абелева p-группа. Из $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \in f(p)$ заключаем, что $H/C_H(N) \in f(p)$. Отсюда следует, что все H-главные факторы подгруппы N являются $\mathfrak{F}$-центральными в H, а значит, $H \in \mathfrak{F}$.

Если N — $\mathfrak{F}$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы G, то H изолирует N, а значит, $H \cap N = 1$. Тогда из $HN/N \cong H$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, каждый $\mathfrak{F}$-изолятор группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

3a) Пусть $h \in H$ и $A = \langle h^G \rangle$. Рассмотрим главный фактор A/B группы G. Тогда $h \in A \backslash B$. Так как H — CAP-подгруппа группы G, то H либо покрывает, либо изолирует A/B. Поэтому из $h \in A\backslash B$ следует, что H покрывает A/B. Из определения $\mathfrak{F}$-изолятора следует, что A/B — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Значит, h — $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральный элемент группы G.

3b) Пусть M — некоторая подгруппа группы G, которая содержит H и все элементы которой $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральны в G. Тогда ввиду леммы 2 подгруппа M изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ группы G. Так как M содержит H, то M покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$. Ввиду [3, лемма A.1.7] порядок подгруппы M равен произведению порядков всех $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов главного ряда $1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$. Тогда ввиду утверждения 1) теоремы имеем $|M| = |H|$. А так как $H \subseteq M$, то $H = M$.

3c) Рассмотрим G-главный ряд $1 = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_k = C$ группы $C = Core_G(H)$. Очевидно, подгруппа H покрывает все G-главные факторы этого ряда. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-изолятора следует, что C_i/C_{i-1} — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $C \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Пусть теперь $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_t = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ — некоторый G-главный ряд группы $Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Так как все его факторы $\mathfrak{F}$-центральны в G, то $HZ_{i-1} \supseteq Z_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Отсюда следует, что $H \supseteq Z_t = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $Z_{\mathfrak{F}}(G) \trianglelefteq G$, то $Z_{\mathfrak{F}}(G) \subseteq Core_G(H) = C$.

3d) Утверждение непосредственно следует из утверждения 3c).

Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, получаем

Следствие 1. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *все изоляторы группы G имеют одинаковый порядок*;

2) *каждый изолятор группы G нильпотентен*;

3) *если H — изолятор группы G, то*:

а) *все элементы из H являются Q-сверхцентральными в G*;

в) *H не содержится в качестве собственной подгруппы ни в одной подгруппе, все элементы которой Q-сверхцентральны в G*;

с) *$Core_G(H)$ — гиперцентр группы G*;

d) *если $H \trianglelefteq G$, то H — гиперцентр группы G.*

Следуя [2], дадим определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}$-*предельной* нормальной подгруппой, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*критической* в G, если в G найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R, что $MR = G$. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-*нормализатором* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует цепь $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ $(n \geq 0)$, в которой подгруппа H_{i-1} $\mathfrak{F}$-критична в H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. По определению, каждая группа G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Как установлено в [5], если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, то в любой группе G с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-нормализаторов. При этом каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор покрывает все $\mathfrak{F}$-центральные и изолирует все $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы группы G, т. е. является $\mathfrak{F}$-изолятором.

Пусть $G = PSL(2, 7)$. Тогда каждая максимальная подгруппа группы G является $\mathfrak{S}$-нормализатором ($\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп). В то же время $\mathfrak{S}$-изолятором группы G является только ее единичная подгруппа. Таким образом, $\mathfrak{F}$-нормализатор группы не всегда является ее $\mathfrak{F}$-изолятором.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, имеющей $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда все элементы из H являются $Q\mathfrak{F}$-сверхцентральными в G.*

Пусть $S = SL(2, 3)$ и V — естественный модуль для S. Как показано в [3, с. 401], группа $G = [V]S$ обладает единственным главным рядом $1 \lhd V \lhd VZ(Q) \lhd VQ \lhd G$, где $Q = O_2(S)$ — группа кватернионов порядка 8. Группа G имеет три класса сопряженных $\mathfrak{N}_3$-изоляторов $\langle gv \rangle$, где $\langle g \rangle$ — силовская 3-подгруппа группы S, $v \in C_V(g)$.

Таким образом, если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, то разрешимая группа может иметь несколько классов сопряженных $\mathfrak{F}$-изоляторов, один из которых совпадает с классом сопряженных $\mathfrak{F}$-нормализаторов.

Пусть $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Следуя [3], систему Σ холловых подгрупп разрешимой группы G будем называть *холловой системой* группы G, если выполняются следующие два условия:

1) для любого подмножества π множества $\pi(G)$ система Σ содержит в точности одну π-холлову подгруппу группы G;

2) если H и K — подгруппы из Σ, то $HK = KH$.

Ввиду основного результата работы [6] имеем

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-изолятор разрешимой группы G. Тогда и только тогда H является $\mathfrak{F}$-нормализатором в G, когда подгруппа H перестановочна с каждым элементом некоторой холловой системы группы G.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аль-Шаро Х.А., Шеметков Л.А.** О подгруппах простого порядка в конечной группе // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 6. С. 745–752.
2. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

3. **Doerk K., Hawkes T.O.** Finite soluble groups. Berlin; New-York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
4. **Carter R.W., Hawkes T.O.** The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble groups // J. Algebra. 1967. Vol. 5, no. 2. P. 175–201.
5. **Шеметков Л.А.** Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 684–715.
6. **Gillam J.D.** Cover-avoid subgroups in finite solvable groups // J. Algebra. 1974. Vol. 29, no. 2. P. 324–329.

Поступила 14.02.2013

Каморников Сергей Фёдорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Шеметкова Ольга Леонидовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
e-mail: ol-shem@mail.ru