Л. П. Авдашкова, С. Ф. Каморников, О классе групп с заданными кофакторами максимальных подгрупп, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 5, 643–649

DOI: 10.4213/mzm8541

Математические заметки

Том 87 выпуск 5 май 2010

УДК 512.542

О классе групп с заданными кофакторами максимальных подгрупп

Л. П. Авдашкова, С. Ф. Каморников

Работа посвящена решению общей проблемы описания конечных разрешимых групп, у которых кофакторы всех максимальных подгрупп принадлежат классу групп $\mathfrak{X}$. Отдельно рассматриваются случаи, когда $\mathfrak{X}$ – гомоморф, класс Шунка и формация. Предлагаемый подход связан с конструкцией локального класса Шунка, определенного с помощью постоянной групповой функции.
Библиография: 7 названий.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными и разрешимыми. Используются определения и обозначения, принятые в [1]. Напомним, что если H — подгруппа группы G, то факторгруппа $H/\operatorname{Core}_G(H)$ называется *кофактором* подгруппы H в группе G (здесь $\operatorname{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G, т.е. $\operatorname{Core}_G(H)=\bigcap_{x\in G} H^x$).

Проблема. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Каково строение группы G, если кофакторы всех ее максимальных подгрупп принадлежат классу $\mathfrak{X}$?*

Частные случаи этой проблемы рассматривались во многих работах. Например, в [2] описан случай, когда $\mathfrak{X}$ – объединение класса всех нильпотентных групп и класса всех групп Шмидта. В [3] изучались группы, у которых порядки кофакторов максимальных подгрупп свободны от квадратов (т.е. в качестве $\mathfrak{X}$ выступает класс всех групп, порядки которых не делятся на p^2 для любого простого числа p). В [4] решение проблемы анонсировано для произвольной насыщенной формации $\mathfrak{X}$. И хотя работа [4] охватывает континуальное семейство классов $\mathfrak{X}$, в то же время она не включает в себя даже те простые случаи, которые отражены в [2], [3]. Это связано с тем, что рассматриваемые в [2], [3] классы $\mathfrak{X}$ не являются формациями.

В настоящей работе проблема исследуется в самом общем случае, когда в качестве $\mathfrak{X}$ берется произвольный гомоморф. Предлагаемый нами подход, с одной стороны, связан с конструкцией $LC(h)$ локального класса Шунка, определенного посредством $\mathfrak{X}$-постоянной функции h (теорема 2), а с другой стороны, мы опираемся на интересную конструкцию $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$, обобщающую идею произведения классов (теоремы 3 и 4). Кроме того, для непустого класса Шунка $\mathfrak{X}$ приводится теорема 5, позволяющая охарактеризовать в терминах $\mathfrak{X}$-проекторов группы, у которых кофакторы всех максимальных подгрупп принадлежат $\mathfrak{X}$.

2. Классы Шунка. Группа G называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой M с единичным ядром $\operatorname{Core}_G(M)$. Как показано в [5], группа G примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в G. Это дополнение и является максимальной подгруппой группы G, имеющей единичное ядро. Понятно, что если M – произвольная максимальная подгруппа группы G, то группа $G/\operatorname{Core}_G(M)$ примитивна.

Класс всех примитивных групп будем обозначать через $\mathfrak{P}$. Кроме того, если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то зафиксируем следующие обозначения:

- $P\mathfrak{X}$ – класс всех групп, у которых каждый примитивный эпиморфный образ принадлежит $\mathfrak{X}$ (по определению $P\varnothing = \varnothing$);
- $Q\mathfrak{X}$ – класс всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{X}$ ($Q\varnothing = \varnothing$);
- $R_0\mathfrak{X}$ – класс всех конечных подпрямых произведений групп из $\mathfrak{X}$ ($R_0\varnothing = \varnothing$).

Класс $\mathfrak{X}$ называется:

1) *P-замкнутым* (или *примитивно замкнутым*), если $P\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$;
2) *Q-замкнутым* (или *гомоморфом*), если $Q\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ называется *классом Шунка*, если он является примитивно замкнутым гомоморфом, т.е. $\mathfrak{X}$ – гомоморф, который обладает следующим свойством: если $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G, то $G \in \mathfrak{X}$.

Из определения и свойств оператора P следует, что для любого класса $\mathfrak{X}$ класс $P\mathfrak{X}$ является классом Шунка, а если $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то $P\mathfrak{X}$ – наименьший класс Шунка, содержащий $\mathfrak{X}$ (т.е. $P\mathfrak{X}$ – класс Шунка, порожденный гомоморфом $\mathfrak{X}$).

Важной характеристикой класса групп $\mathfrak{X}$ является его *Q-граница*. Так называется класс $b(\mathfrak{X})$, состоящий из всех тех групп G, которые не принадлежат $\mathfrak{X}$, но все их собственные факторгруппы входят в $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что непустой гомоморф является классом Шунка тогда и только тогда, когда $b(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{P}$. Таким образом, Q-граница класса Шунка состоит из примитивных групп.

3. Связь с локальными классами Шунка. Конструкция локального класса Шунка базируется на следующей теореме из [1].

Теорема 1. *Пусть h – функция, которая ставит в соответствие каждому простому числу p некоторый (возможно, пустой) класс групп $h(p)$, и пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех таких групп G, которые удовлетворяют следующему условию* ($*$):

$\operatorname{Aut}_G(H/K) \in h(p)$ *для любого нефраттиниева главного фактора H/K группы G и простого числа p, делящего $|H/K|$.* ($*$)

Тогда $\mathfrak{H}$ является классом Шунка.

Определение 1 [1]. Пусть h – функция, определенная в теореме 1. Тогда

1) класс $\mathfrak{H}$ всех групп, удовлетворяющих условию ($*$), называется *классом Шунка, локально определенным функцией h* (обозначается через $LC(h)$);
2) функция h называется *локальной функцией*, если $h(p)$ – гомоморф для любого простого числа p;
3) класс $\mathfrak{H}$ называется *локальным классом Шунка*, если $\mathfrak{H} = LC(h)$ для некоторой локальной функции h.

Если $\mathfrak{H}$ – класс всех групп, для каждой из которых условие ($*$) выполняется для ее любого главного фактора (а не только для любого нефраттиниева главного фактора), то класс $\mathfrak{H}$ является формацией (см., например, [6]). Но в таком случае $\mathfrak{H}$ не является классом Шунка, а, тем более, локальным классом Шунка (соответствующие примеры можно найти в [1]).

Определение 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Функция h, которая ставит в соответствие каждому простому числу p класс $\mathfrak{X}$ (т.е. $h(p) = \mathfrak{X}$), называется *$\mathfrak{X}$-постоянной*.

Следующая теорема в случае гомоморфа $\mathfrak{X}$ сводит решение отмеченной во введении проблемы к исследованию локального класса, определяемого $\mathfrak{X}$-постоянной функцией.

Мы опираемся на известный результат о связи централизатора дополняемого главного фактора группы с ядром максимальной подгруппы, изолирующей этот фактор. Этот результат мы приведем в виде леммы (см. [1; 15.5, с. 54, утверждение A]).

Лемма 1. *Пусть H/K – дополняемый главный фактор группы G, а M – дополнение к H/K в группе G. Пусть $R = C_G(H/K)$ и $S = C_M(H/K)$. Тогда*
1) $S = \mathrm{Core}_G(M)$;
2) G/S – *примитивная группа*;
3) R/S – *цоколь группы* G/S;
4) $R = HS$;
5) $H \cap S = K$;
6) $C_G(R/S) = C_G(H/K) = R$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Если $\mathfrak{H}$ – класс всех групп, у которых кофактор каждой максимальной подгруппы принадлежит $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{H} = LC(h)$, где h – $\mathfrak{X}$-постоянная функция.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = \varnothing$. Тогда, с одной стороны, $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда в G нет максимальных подгрупп, т.е. $G = 1$. С другой стороны, $G \in LC(h)$ тогда и только тогда, когда в G нет дополняемых главных факторов, что возможно лишь в случае $G = 1$. Значит, если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\mathfrak{H} = LC(h)$, где h – $\mathfrak{X}$-постоянная функция.

Пусть теперь $\mathfrak{X} \neq \varnothing$, и пусть $G \in \mathfrak{H}$, т.е. $M/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Если H/K – произвольный дополняемый главный фактор группы G, а S – максимальная подгруппа группы G, изолирующая H/K, то в силу леммы 1

$$\mathrm{Aut}_G(H/K) \simeq G/C_G(H/K) \simeq S/\mathrm{Core}_G(S).$$

Следовательно, $\mathrm{Aut}_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. Так как функция h является $\mathfrak{X}$-постоянной, то $\mathrm{Aut}_G(H/K) = h(p)$, где p – простое число, делящее $|H/K|$. Значит, по определению $G \in LC(h)$.

Покажем обратное. Пусть $G \in LC(h)$, и пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. Так как группа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ примитивна, ее цоколь $N/\mathrm{Core}_G(M)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\mathrm{Core}_G(M)$. При этом подгруппа $M/\mathrm{Core}_G(M)$ дополняет $N/\mathrm{Core}_G(M)$ в группе $G/\mathrm{Core}_G(M)$. Отсюда и из $C_G(N/\mathrm{Core}_G(M)) = N$ имеем

$$M/\mathrm{Core}_G(M) \simeq G/N \simeq \mathrm{Aut}_G(N/\mathrm{Core}_G(M)).$$

Теперь из $G \in LC(h)$ следует, что $M/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. Значит, кофакторы всех максимальных подгрупп группы G принадлежат $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

4. Связь с классом $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$. Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 2. *Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $Q\mathfrak{X}\cup b(Q\mathfrak{X})$ – гомоморф. В частности, для любого гомоморфа $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{X}\cup b(\mathfrak{X})$ является гомоморфом.*

Из леммы 2 следует, что для любого класса $\mathfrak{X}$ класс $P(Q\mathfrak{X}\cup b(Q\mathfrak{X}))$ является наименьшим классом Шунка, содержащим $Q\mathfrak{X}\cup b(Q\mathfrak{X})$. Если же $\mathfrak{X}$ – гомоморф, то $P(\mathfrak{X}\cup b(\mathfrak{X}))$ – наименьший класс Шунка, содержащий $\mathfrak{X}$.

Следуя [1], для гомоморфа $\mathfrak{X}$ определим класс $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ как класс Шунка, порожденный классом $\mathfrak{X}\cup b(\mathfrak{X})$, т.е.

$$\mathfrak{N}[\mathfrak{X}] = P(\mathfrak{X}\cup b(\mathfrak{X})).$$

Теорема 3. *Для любого гомоморфа $\mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{N}[\mathfrak{X}] = LC(h),$$

где h – локальная $\mathfrak{X}$-постоянная функция.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}=\varnothing$. Тогда $b(\mathfrak{X})$ – единичный класс, а значит, группа G входит в $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ тогда и только тогда, когда она не имеет примитивных факторгрупп. Следовательно, $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ – единичный класс. Как показано в теореме 2, при $\mathfrak{X}=\varnothing$ локальный класс Шунка $LC(h)$ также является единичным. Поэтому при $\mathfrak{X}=\varnothing$ справедливо равенство $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]=LC(h)$, где $h(p)=\varnothing$ для любого простого числа p.

Пусть теперь $\mathfrak{X}\neq\varnothing$, и пусть $G\in\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$. Тогда в силу равенства $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]=P(\mathfrak{X}\cup b(\mathfrak{X}))$ все примитивные факторгруппы группы G либо принадлежат $\mathfrak{X}$, либо входят в $b(\mathfrak{X})$. Пусть H/K – произвольный дополняемый главный фактор группы G, а M – максимальная подгруппа группы G, дополняющая H/K в G. Так как группа $G/\operatorname{Core}_G(M)$ примитивна, то либо $G/\operatorname{Core}_G(M)\in\mathfrak{X}$, либо $G/\operatorname{Core}_G(M)\in b(\mathfrak{X})$. Если $G/\operatorname{Core}_G(M)\in\mathfrak{X}$, то из того, что $\mathfrak{X}$ – гомоморф и $\operatorname{Core}_G(M)\subseteq C_G(H/K)$, группа $G/C_G(H/K)$ принадлежит $\mathfrak{X}$ как гомоморфный образ группы $G/\operatorname{Core}_G(M)$. Пусть $G/\operatorname{Core}_G(M)\in b(\mathfrak{X})$. В силу леммы 1

$$C_G(H/K)/\operatorname{Core}_G(M)$$

– цоколь примитивной группы $G/\operatorname{Core}_G(M)$. Поэтому из определения Q-границы заключаем, что

$$G/\operatorname{Core}_G(M)/\operatorname{Soc}(G/\operatorname{Core}_G(M))\in\mathfrak{X},$$

а значит,

$$G/C_G(H/K)\simeq G/\operatorname{Core}_G(M)/C_G(H/K)/\operatorname{Core}_G(M))\in\mathfrak{X}.$$

Итак, для любого дополняемого главного фактора H/K группы G всегда

$$\operatorname{Aut}_G(H/K)\simeq G/C_G(H/K)\in\mathfrak{X}=h(p),$$

где p – простое число, делящее $|H/K|$. Отсюда $G\in LC(h)$, а значит, $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]\subseteq LC(h)$.

Покажем обратное. Пусть $G\in LC(h)$. Тогда $G/C_G(H/K)\in\mathfrak{X}=h(p)$ для каждого дополняемого главного фактора H/K группы G и простого числа p, делящего $|H/K|$. Пусть G/N – примитивная факторгруппа группы G и $L/N=\operatorname{Soc}(G/N)$. Тогда L/N – дополняемый главный фактор группы G и на основании леммы 1

$C_G(L/N) = L$. Значит, $G/L \in \mathfrak{X}$. Если G/N не принадлежит $\mathfrak{X}$, то из примитивности группы G/N и того, что $\mathfrak{X}$ – гомоморф, следует $G/N \in b(\mathfrak{X})$. Таким образом, $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$, а значит, $LC(h) \subseteq \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Для любого гомоморфа $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ является локальным классом Шунка.*

Следствие 3.2. *Для любого класса Шунка $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ является локальным классом Шунка.*

Следствие 3.3. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый гомоморф. Если $\mathfrak{H}$ – класс всех групп, у которых кофактор каждой максимальной подгруппы принадлежит $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$.*

Напомним, что гомоморф $\mathfrak{X}$ называется *формацией*, если он замкнут относительно подпрямых произведений с конечным числом сомножителей. Другими словами, $\mathfrak{X}$ – формация, если класс $\mathfrak{X}$ Q-замкнут и R_0-замкнут.

Следствие 3.4. *Для любой формации $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$ является локальным классом Шунка.*

Следующие два результата показывают, что в случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация, строение класса $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$ может быть значительно уточнено. Нам понадобятся следующие обозначения. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы групп, то под их произведением (обозначается $\mathfrak{X}\mathfrak{H}$) понимается класс всех групп, обладающих нормальной $\mathfrak{X}$-подгруппой, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$ или $\mathfrak{H} = \varnothing$, то по определению $\mathfrak{X}\mathfrak{H} = \varnothing$.

Лемма 3. *Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$. Тогда в силу теоремы 3 $G \in LC(h)$, где $h(p) = \mathfrak{F}$ для любого простого числа p. Значит, $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ для каждого дополняемого главного фактора H/K группы G. В силу [1; 13.8, теорема A] пересечение централизаторов всех дополняемых главных факторов группы G совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы G. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $G/F(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда имеем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, а значит, $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Предположим, что $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Пусть D – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$. Очевидно, D не входит в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$ – класс Шунка, то D – примитивная группа. Поэтому $F(D) = \mathrm{Soc}(D)$, а значит, в силу того, что $D \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, все собственные факторгруппы группы D принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как $D \notin \mathfrak{F}$, то $D \in b(\mathfrak{F})$. Но тогда $D \in \mathfrak{N}[\mathfrak{F}]$. Пришли к противоречию с выбором группы D. Следовательно, $\mathfrak{N}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф и h – локальная $\mathfrak{X}$-постоянная функция. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}] = \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X}$ – формация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}] = \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{X}$ является формацией. Предположим, что это не верно. Тогда, так как класс $\mathfrak{X}$ является гомоморфом, $\mathfrak{X} \subset R_0\mathfrak{X}$. Пусть X – группа наименьшего порядка из $R_0\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{X}$. В силу [1; 2.5, утверждение II] группа X обладает двумя минимальными нормальными подгруппами M и N такими, что $X/M \in \mathfrak{X}$ и $X/N \in \mathfrak{X}$. Пусть p – простое число, не делящее $|X|$. Пусть U и V – такие $F_p[X]$-модули, что $C_X(U) = M$, $C_X(V) = N$

(в качестве U можно взять, например, регулярный $F_p[X/M]$-модуль, а затем расширить его естественным образом до $F_p[X]$-модуля; также можно поступить и при выборе $F_p[X]$-модуля V).

Пусть $W = U \oplus V$ – прямая сумма $F_p[X]$-модулей U и V. Рассмотрим группу $G = [W]X$. Так как

$$C_X(W) = C_X(U) \cap C_X(V) = M \cap N = 1,$$

то W – точный $F_p[X]$-модуль. Поэтому $F(G)$ – p-группа, а значит, $F(G) \cap X \subseteq O_p(G)$. А так как p не делит $|X|$, то $O_p(G) = 1$ и $F(G) = W$. Отсюда следует, что G не принадлежит $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$.

Пусть K/L – главный фактор группы G главного ряда, проходящего через подгруппы U и W. Если фактор K/L расположен выше W, то в силу изоморфизма $X \simeq G/W$ имеем на основании [1; 13.8, утверждение A], что $C_G(K/L) \supseteq WF(X)$, а значит, $G/C_G(K/L) \in \mathfrak{X}$. Если же фактор K/L расположен ниже W, то либо $C_G(K/L)$ содержит WN (если $U \subseteq L \subset K \subseteq W$), либо $C_G(K/L)$ содержит WM (если $1 \subseteq L \subset K \subseteq U$). В обоих случаях $G/C_G(K/L) \in \mathfrak{X}$ как гомоморфный образ либо группы X/M, либо группы X/N. В силу [1; 9.13, утверждение A] для любого дополняемого главного фактора K/L группы G имеем $G/C_G(K/L) \in \mathfrak{X}$. Значит, $G \in LC(h)$, где h – локальная $\mathfrak{X}$-постоянная функция. Отсюда на основании теоремы 3 имеем, что $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}] = \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Пришли к противоречию с тем, что $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X} = R_0\mathfrak{X}$, т.е. $\mathfrak{X}$ – формация.

Обратное утверждение теоремы следует из леммы 3. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой гомоморф, и пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех групп, у которых кофактор каждой максимальной подгруппы принадлежит $\mathfrak{X}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X}$ – формация.*

5. Связь с $\mathfrak{X}$-проекторами. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{H}$-покрывающей подгруппой*, если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{H}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathfrak{H}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{H}$-проектором*, если HN/N – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G/N для любой нормальной подгруппы N группы G.

Следуя [1], множество всех $\mathfrak{H}$-покрывающих подгрупп группы G будем обозначать через $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{H}}(G)$, а множество всех $\mathfrak{H}$-проекторов группы G – через $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G)$.

Из результатов Шунка [7] следует, что для непустого класса $\mathfrak{H}$ в каждой группе существует $\mathfrak{H}$-проектор тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$ – примитивно замкнутый гомоморф (т.е. класс Шунка). Кроме того, для любой разрешимой группы G всегда $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{H}}(G) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G) \neq \varnothing$ и любые два $\mathfrak{H}$-проектора группы G сопряжены.

Для непустого класса Шунка $\mathfrak{X}$ следующая теорема позволяет охарактеризовать класс $\mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ в терминах $\mathfrak{X}$-проекторов.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка. Если H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G, то $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$ тогда и только тогда, когда $G = HC_G(L/K)$ для любого дополняемого главного фактора H/K группы G.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$. Тогда в силу теоремы 3 $G \in LC(h)$, где $h(p) = \mathfrak{X}$ для любого простого числа p. Поэтому если L/K – дополняемый главный фактор группы G, то $G/C_G(L/K) \in \mathfrak{X}$. Но тогда из определения $\mathfrak{X}$-проектора следует, что $G/C_G(L/K) = HC_G(L/K)/C_G(L/K)$, а значит, $G = HC_G(L/K)$.

Пусть теперь $G = HC_G(L/K)$ для любого дополняемого главного фактора L/K группы G. Пусть G/N – примитивная факторгруппа группы G и S/N – цоколь группы G/N. Тогда в силу леммы 1 $S = C_G(S/N)$. Поэтому из равенства $G = HC_G(S/N)$ имеем, что $G/N = (HN/N)(S/N)$. Так как S/N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G/N, то либо $HN/N = G/N$, либо HN/N – максимальная подгруппа группы G/N. В первом случае из того, что H – $\mathfrak{X}$-проектор G, имеем $G/N \in \mathfrak{X}$. Во втором случае из примитивности группы G/N следует, что $G/N \in b(\mathfrak{X})$. Таким образом, все примитивные факторы группы G принадлежат $\mathfrak{X} \cup b(\mathfrak{X})$, т.е. $G \in \mathfrak{N}[\mathfrak{X}]$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка, и пусть $\mathfrak{H}$ – класс всех групп, у которых кофактор каждой максимальной подгруппы принадлежит $\mathfrak{X}$. Если H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G, то $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G = HC_G(L/K)$ для любого дополняемого главного фактора группы G.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[2] Я. Г. Беркович, “Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:2 (1968), 243–248.

[3] С. М. Евтухова, В. С. Монахов, “Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов”, *Докл. НАН Беларуси*, **49**:2 (2005), 26–29.

[4] С. М. Евтухова, В. С. Монахов, “Конечные группы с $\mathfrak{H}$-кофакторами максимальных подгрупп”, *X Белорусская математическая конференция*, Тезисы докладов, Факториал, Минск, 2008, 24–25.

[5] R. Baer, “Classes of finite groups and their properties”, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115–187.

[6] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[7] H. Schunck, “$\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Z.*, **97** (1967), 326–330.

Л. П. Авдашкова
Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации, г. Гомель
E-mail: avdashkova@mail.ru

Поступило
07.07.2009
Исправленный вариант
10.11.2009

С. Ф. Каморников
Гомельский филиал Международного института трудовых и
социальных отношений, г. Гомель
E-mail: sfkamornikov@mail.ru