Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 532.526

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. С. СРУБЩИК, В. И. ЮДОВИЧ

АСИМПТОТИКА СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 15 X 1970)

Речь пойдет об асимптотике двумерной задачи с начальными данными для уравнений Навье — Стокса в случае безграничной несжимаемой жидкости. Будем считать, что поле скоростей, заданное в начальный момент времени $t=0$, непрерывно, а вихрь имеет разрыв первого рода на границе S_0 некоторой ограниченной области $\mathscr{D}_0$, вне которой он равен нулю. Массовые силы предполагаются потенциальными *.

Сглаживающее действие вязкости приводит к тому, что решение уравнений Навье — Стокса при $t>0$ бесконечно дифференцируемо несмотря на разрывность начальных данных. В то же время слабый разрыв в идеальной жидкости сохраняется вечно и линия слабого разрыва S_t при всех t состоит из тех же жидких частиц, которые при $t=0$ находились на S_0 **. Поэтому при малой вязкости ν вблизи S_t имеет место внутренний пограничный слой.

Вопросу о возможности предельного перехода при $\nu\to 0$ в двумерной задаче Коши для уравнений Навье — Стокса посвящена работа ([11]), в которой выводятся оценки решений, равномерные по ν. Ряд оценок такого рода содержится в ([7]). Оценки, данные в ([8]), также имеют место и в случае вязкой жидкости. Заметим, что квазилинейные параболические уравнения с малым параметром при старших производных излучались в ([12]) (см. также ([13])). Внутренний пограничный слой для линейных параболических уравнений рассмотрен в ([14], [15]).

Итак, рассматривается решение системы

$$\begin{gathered}\partial\Omega/\partial t+\mathbf{w}\operatorname{grad}\Omega=\nu\Delta\Omega,\quad \operatorname{div}\mathbf{w}=0,\quad \mathbf{w}=(u,v),\\ \Omega=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y,\quad \nu>0,\quad \mathbf{w}|_\infty=0,\quad -\infty<x,y<\infty,\end{gathered}\tag{1}$$

и соответствующей системы

$$\begin{gathered}\partial\Omega_0/\partial t+\mathbf{w}_0\operatorname{grad}\Omega_0=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{w}_0=0,\quad \mathbf{w}_0=(u_0,v_0),\\ \Omega_0=\partial v_0/\partial x-\partial u_0/\partial y,\quad \mathbf{w}_0|_\infty=0,\quad -\infty<x,y<\infty,\end{gathered}\tag{2}$$

с начальным условием

$$\Omega|_{t=0}=\Omega_0|_{t=0}=\begin{cases} f(x,y) & \text{при } (x,y)\in\mathscr{D}_0;\\ 0 & \text{при } (x,y)\overline{\in}\mathscr{D}_0.\end{cases}\tag{3}$$

Будем считать для простоты, что $S_0\in C^\infty$, $f\in C^\infty(\overline{\mathscr{D}}_0)$, причем область $\mathscr{D}_0$ односвязна. Поле скоростей при $t=0$ предполагается непрерывным и исчезающим на бесконечности.

---

* Однозначная разрешимость в целом этой (и более общей задачи) была доказана в ([1]) и (существенно новым методом) в ([2]) (см. также ([3])).

** Однозначная разрешимость в целом задачи с гладкими начальными данными для двумерных уравнений Эйлера была доказана в ([4–8]), а в случае слабых разрывов в ([5], [7]); разрешимость в малом была доказана в классических работах ([9], [10]).

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (3) строится в виде

$$\mathbf{w} = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \mathbf{w}_k + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \mathbf{h}_k + \mathbf{R}_N. \qquad (4)$$

При этом векторы $\mathbf{w}_k$ находятся с помощью первого итерационного процесса: $\mathbf{w}_0 = (u_0, v_0)$, $\Omega_0 = \operatorname{rot} \mathbf{w}_0$ определяются из (2), (3), а $\mathbf{w}_k = (u_k, v_k)$, $\Omega_k = \operatorname{rot} \mathbf{w}_k$ из системы

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k} \left(u_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x} + v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial y} \right) = \Delta \Omega_{k-2} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_k = 0, \quad \Omega_k \big|_{t=0} = 0 \quad (\Omega_{-2} = \Omega_{-1} \equiv 0). \qquad (5)$$

Из результатов [8] можно вывести, что функция Ω_0 при $t > 0$ имеет конечный скачок на линии S_t. Аналогично доказывается, что задача (5) однозначно разрешима, причем функции Ω_k имеют конечный скачок при переходе через S_t, в то время как u_k, v_k непрерывны. При этом существуют предельные значения Ω_k и их производных любого порядка при приближении к границе S_t извне и изнутри.

Погранслойные вектор-функции $\mathbf{h}_k$ сосредоточены в окрестности контура S_t и компенсируют разрывы вихря Ω_k и его производных. Они строятся отдельно в вихревой области $\mathcal{D}_t$ и вне ее. Для этого удобно ввести локальные подвижные координаты (ρ, φ): пусть $x = x(t, \gamma)$; $y = y(t, \gamma)$ — параметрические уравнения контура S_t, тогда $\rho = \rho(x, y, t)$ — расстояние от точки (x, y) до S_t, а $\varphi = \varphi(x, y, t)$ есть значение параметра γ, соответствующее точке на S_t, ближайшей к (x, y). Заметим, что ρ, φ можно эффективно определить с помощью алгоритма, данного в [8].

Теперь подставляем (4) в (1), учитываем (5) и полученные уравнения для $\mathbf{h}_k$ записываем в координатах (ρ, φ). Разлагаем известные коэффициенты в ряды Тейлора по степеням ρ, полагаем $\rho = \varepsilon s$ в области $\mathcal{D}_t$ и $\rho = -\varepsilon s$ вне ее. Тогда для определения $\mathbf{h}_k$ получаем систему

$$g_k = \sum_{j+i=k+1} s^j \left[a_j \frac{\partial h_{2i}}{\partial s} - b_j \frac{\partial h_{1i}}{\partial s} \right] + \sum_{j+i=k} s^j \left[c_j \frac{\partial h_{2i}}{\partial \varphi} - d_j \frac{\partial h_{1i}}{\partial \varphi} \right],$$

$$0 = \sum_{j+i=k+1} s^j \left[a_j \frac{\partial h_{1i}}{\partial s} + b_j \frac{\partial h_{2i}}{\partial s} \right] + \sum_{j+i=k} s^j \left[c_j \frac{\partial h_{1i}}{\partial \varphi} + d_j \frac{\partial h_{2i}}{\partial \varphi} \right], \qquad (7)$$

$$\mathbf{h}_k = (h_{1k}, h_{2k}), \qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n, c_n, d_n) \rho^n.$$

Функция g_k асимптотически совпадает с $\operatorname{rot} \mathbf{h}_k$ при $\varepsilon \to 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial g_k^{(i)}/\partial t + b(t, \varphi)\, \partial g_k^{(i)}/\partial \varphi + s a(t, \varphi)\, \partial g_k^{(i)}/\partial s - \partial^2 g_k^{(i)}/\partial s^2 = F_k^{(i)}(t, \varphi, s). \qquad (8)$$

Здесь $i = 1$ при $(x, y) \in \mathcal{D}_t$, а если $(x, y) \overline{\in} \mathcal{D}_t$, то $i = 2$. Коэффициенты $a(t, \varphi)$, $b(t, \varphi)$ — известные функции,

$$b(t, \varphi) = \partial \varphi/\partial t + \mathbf{w}_0 \nabla \varphi \big|_{\rho=0}, \qquad a(t, \psi) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{w}_0 \Delta \rho \right] \Big|_{\rho=0}. \qquad (9)$$

Правая часть $F_k^{(i)}$ выражается через $\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_k$; $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{k-1}$.

Явных формул не приводим за недостатком места. Заметим лишь, что $F_0^{(1)} = F_0^{(2)} \equiv 0$. Функции $g_k^{(i)}$ 2π-периодичны по φ. Требование непрерывности $\operatorname{rot} \mathbf{w}$ и его первых производных при переходе через S_t приводят к соотношениям

$$g_k^{(2)} - g_k^{(1)} \big|_{s=0} = \Omega_k^{(1)} \big|_{\rho=0}; \qquad \partial g_k^{(1)}/\partial s + \partial g_k^{(2)}/\partial s \big|_{s=0} = -\partial \Omega_{k-1}^{(1)}/\partial \rho \big|_{\rho=0}, \quad \Omega_{-1} \equiv 0, \qquad (10)$$

Кроме того, должны выполняться условия

$$g_k^{(1)}\big|_{t=0} = g_k^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad g_k^{(1)}\big|_{s=\infty} = g_k^{(2)}\big|_{s=\infty} = 0. \tag{11}$$

При выводе (8) — (11) использованы равенства $\mathbf{h}_0 = 0$, $\rho_t + \mathbf{w}_0 \nabla \rho \,|_{S_t} = 0$. Заметим, что первое вытекает из непрерывности поля скоростей $\mathbf{w}_0$ при переходе через S_t, а второе является следствием теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей.

Вектор $\mathbf{h}_k$, после того как из (8) — (11) найдена функция $\mathbf{g}_k$, легко определяется из системы (7). Если решение задачи (2), (3) известно, то можно получить явное выражение для главного члена асимптотики $g_0^{(i)}$. Сделаем в уравнениях (8) при $m = 0$ замену переменных

$$\tau = t, \quad \eta = \varphi, \quad x = sL(t, \varphi), \tag{12}$$

где L — решение задачи Коши

$$\partial L / \partial t + b(t, \varphi) \partial L / \partial \varphi + a(t, \varphi) L = 0; \quad L\,|_{t=0} = 1. \tag{13}$$

Тогда уравнения (8) принимают вид

$$\partial g^{(i)} / \partial \tau + b(\tau, \eta) \partial g^{(i)} / \partial \eta = L^2(\tau, \eta) \partial^2 g^{(i)} / \partial x^2. \tag{14}$$

Далее, полагаем в (14) $\tau_1 = \tau$; $\eta_1 = \eta_1(\tau, \eta)$; $x_1 = x$, где η_1 — решение задачи Коши

$$\partial \eta_1 / \partial \tau + b(\tau, \eta) \partial \eta_1 / \partial \eta = 0; \quad \eta_1\,|_{\tau=0} = \eta. \tag{15}$$

Наконец, вводя вместо τ_1 новую переменную τ_2 $(d\tau_2 = L_2(\tau, \eta_1) d\tau_1)$, приводим задачу к системе уравнений с постоянными коэффициентами на луче $x > 0$:

$$\partial g^{(i)} / \partial \tau_2 = \partial^2 g^{(i)} / \partial x_1^2; \quad g^{(2)} - g^{(1)}\,|_{x_1=0} = F(\tau_2, \eta(\eta_1, \tau_2)); \quad F(\tau, \varphi) = \Omega_0^{(1)}\big|_{\rho=0},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(g^{(2)} + g^{(1)})\,|_{x_1=0} = 0; \quad g^{(i)}\,|_{t=0} = 0; \quad g^{(i)}\,|_{s=\infty} = 0, \tag{16}$$

которая легко решается в квадратурах.

Пример. Эллиптический вихрь Кирхгоффа. Пусть S_0 есть эллипс $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$; $f = 2\zeta = \mathrm{const}$. Соответствующее течение идеальной жидкости хорошо известно ([16, 17]): в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\omega = 4ab\zeta(a+b)^{-2}$ вихревая область не меняется и вихрь остается постоянным. В этой системе координат уравнение границы S_t имеет параметрические уравнения $x = a \cos \gamma$, $y = b \sin \gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$. Для определения функций $g_0^{(i)}$ имеем уравнения (8) при $m = 0$, в которых следует положить $\varphi = \omega t + \gamma$, $\Delta_2(\varphi) = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$, $a(t, \varphi) = \omega \partial \ln \Delta(\varphi) / \partial \varphi$, $b(t, \varphi) = 2\omega$, $\Omega_0^{(1)} = 2\zeta$.

Решение системы (8) — (11) можно представить в виде

$$g_0^{(2)}(t, \varphi, s) = -g_0^{-1}(t, \varphi, s) = \zeta\, \mathrm{erf\,c}[s / \sqrt{p(t, \varphi)}];$$

$$p(t, \varphi) = \frac{2\Delta(\varphi)}{\omega} \int\limits_{\varphi - 2\omega t}^{\varphi} \Delta^{-1}(y)\, dy, \quad \mathrm{erf\,c}\, x = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_x^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Для компонент (h_{11}, h_{12}) погранслойного вектора $\mathbf{h}_1$ получаем

$$h_{11} = -\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi h_{12} = s\, \mathrm{erf\,c}\,[s / \sqrt{p}] - \sqrt{\frac{p}{\pi}}\, e^{-s^2/p}.$$

Обоснование проводится методами работ ([18, 19]) с использованием результатов работ ([5–8]).

Теорема. *Для решения задачи* (1), (3) *справедливо асимптотическое разложение* (4) *при* $\varepsilon \to 0$, *где остаточный член* $\mathbf{R}_N$ *допускает равномерную на каждом конечном интервале времени оценку*

$$\operatorname{vrai} \max_{-\infty<x,\, y<\infty} |\operatorname{rot} \mathbf{R}_N| \leqslant M(T)\,\varepsilon^N, \quad t \in (0, T].$$

Проведенные рассмотрения нетрудно распространить на случай, когда массовые силы непотенциальны, а функция $\Omega|_{t=0} \neq 0$ вне $\mathscr{D}_0$.

Аналогичные результаты для осесимметричной задачи получены в настоящее время авторами совместно с В. А. Батищевым. В частности, изучен распад сферического и эллипсоидального вихря Хилла под действием вязкости. В общем трехмерном случае также можно построить формальные асимптотические разложения, но неизвестно, как их обосновать.

Другая трудная задача — асимптотика в случае сильного разрыва — скачка скорости при $t = 0$. Здесь неизвестны даже формальные асимптотические разложения, за исключением элементарных частных случаев кругового и прямолинейного течения. Задача с сильным разрывом, по существу, близка к задаче с твердыми стенками. Напомним, что вопрос об асимптотике при наличии твердой стенки остается открытым даже в двумерном случае несмотря на то, что соответствующие задачи с начальными данными для вязкой и идеальной жидкости, а также уравнения пограничного слоя Прандтля ([20]) довольно хорошо изучены.

Ростовский государственный
университет

Поступило
12 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Leray, J. Math. pures et appl., S. IX, 12, 1 (1933). [2] О. А. Ладыженская, Тр. Московск. Матем. общ., **8**, 71 (1959). [3] О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 1961. [4] W. Wolibner, Math. Zs., **37**, 699 (1933). [5] В. И. Юдович, ДАН, **136**, № 3, 564 (1961). [6] В. И. Юдович, ДАН, **146**, № 3, 561 (1962). [7] В. И. Юдович, Вычислит. матем. и матем. физ., **3**, № 6, 1032 (1963). [8] В. И. Юдович, Математ. сборн., **64** (106), № 4, 562 (1964). [9] Н. М. Гюнтер, Изв. Физ.-матем. инст. им. В. А. Стеклова, **2**, 1 (1927). [10] L. Lichtenstein, Math. Zs., **23**, 89 (1925). [11] К. К. Головкин, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, **92**, 31 (1966). [12] О. А. Олейник, УМН, **12**, в. 3 (75), 3 (1957). [13] В. А. Треногин, УМН, **16**, в. 1 (97), 163 (1961). [14] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, **12**, в. 5 (77), 3 (1957). [15] Е. И. Исакова, ДАН, **117**, № 6, 935 (1957). [16] Г. Вилля, Теория вихрей, 1936. [17] Г. Ламб, Гидродинамика, 1940. [18] Л. С. Срубщик, В. И. Юдович, ПММ, **26**, в. 5, 913 (1962). [19] Л. С. Срубщик, В. И. Юдович, Вычислит. матем. и матем. физ., **6**, в. 6, 1127 (1966). [20] О. А. Олейник, ПММ, **30**, в. 5 (1966).