Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 517.522 *МАТЕМАТИКА*

Д. К. УГУЛАВА

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЛАПЛАСА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 I 1971)

В настоящей заметке рассматривается линейный метод суммирования многомерных рядов Фурье — Лапласа, который насыщен с порядком насыщения, равным n^α, $\alpha > 0$, и обладает классом насыщения $H(X, n^\alpha)$ (см. ([1]), стр. 219). Для ясности напомним определение указанного класса.

Пусть Ω_m $(m \geqslant 3)$ — единичная сфера m-мерного эвклидова пространства, а $C(\Omega_m)$, $L_p(\Omega_m)$, $1 \leqslant p < \infty$, $L_\infty(\Omega_m)$ и $M(\Omega_m)$ соответственно обозначают банаховы пространства определенных на Ω_m непрерывных, суммируемых со степенью p, существенно ограниченных измеримых функций и конечных, регулярных борелевых мер с обычными нормами (см., например, ([1]), стр. 203—204). Под X будем подразумевать одно из пространств $L_p(\Omega_m)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $C(\Omega_m)$. $\tilde{X}$ будет $L_\infty(\Omega_m)$, $L_p(\Omega_m)$, $1 < p < \infty$, или $M(\Omega_m)$, если соответственно X есть $C(\Omega_m)$, $L_p(\Omega_m)$ или $L_1(\Omega_m)$.

Рассмотрим формальный ряд Фурье — Лапласа функции $f(\vartheta)$, $\vartheta \in \Omega_m$,

$$f(\vartheta) \sim = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(m)}(f, \vartheta), \tag{1}$$

где $Y_k^{(m)}(f, \vartheta)$ — гиперсферическая гармоника функции $f(\vartheta)$ порядка k:

$$Y_k^{(m)}(f, \vartheta) = \frac{k+\lambda}{2\pi^{1+\lambda}} \Gamma(\lambda) \int_{\Omega_m} f(\vartheta^*) P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, d\Omega_m(\vartheta^*),$$

$\lambda = (m-2)/2$, $\Gamma(\lambda)$ — интеграл Эйлера второго рода, $P_k^{(\lambda)}(\cos\gamma)$ — ультрасферический полином порядка k, γ — угол между векторами $O\vartheta$ и $O\vartheta^*$, O — центр сферы Ω_m.

Говорят, что $f(\vartheta) \in H(X, \varphi(n))$, где $\varphi(n)$ — какая-то неотрицательная функция целочисленного аргумента n, исчезающая, возможно, лишь при $n = 0$, если из условия $f \in X$ вытекает существование функции $g \in \tilde{X}$ такой, что для любого $n \geqslant 0$

$$\varphi(n) Y_n^{(m)}(f, \vartheta) = Y_n^{(m)}(g, \vartheta). \tag{2}$$

В случае, когда $f \in L_1(\Omega_m)$, в правой части надо взять $Y_n^{(m)}(d\mu, \vartheta)$, где $\mu \in M(\Omega_m)$.

В работе ([1]) класс $H(X, \varphi(n))$ изучается в связи с известной проблемой насыщения, а в ([2]) в связи с некоторыми другими вопросами конструктивного характера.

Обобщенными нормальными средними ряда ([1]) называем суммы:

$$Z_n^{\beta, r}(f, \vartheta) = \sum_{\nu=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{A_n^\beta - A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta}\right)^r\right] Y_\nu^{(m)}(f, \vartheta), \quad n \geqslant 0, \tag{3}$$

где $A_\nu^\beta = \binom{\nu+\beta}{\nu}$ — чезаровские числа порядка β, а β и r — произвольные положительные числа. При $\beta = 1$ мы получаем нормальные средние Зигмунда ([3]), а при $r=1$ суммы (3) превращаются в чезаровские средние порядка β для ряда (1) (см., например, ([1]), стр. 212).

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $f(\vartheta)$, $\vartheta\in\Omega_m$, классу $H(X,n^r)$, где r — любое положительное число, является соотношение*

$$\|f-Z_n^{\beta,r)}(f)\|_X=O(1)\,n^{-r}\quad(n\to\infty),\tag{4}$$

где β — произвольное число, удовлетворяющее условию $\beta>\lambda$, а выражение $O(1)$ ограничено сверху числом, не зависящим от n.

Примечание. При доказательстве необходимости устанавливается, что из условия $f(\vartheta)\in H(X,n^\alpha)$, где α — любое положительное число, вытекает соотношение

$$\|f-Z_n^{\beta,r}(f)\|_X\leqslant c(m,\alpha,\beta,r)\|g\|_{\widetilde{X}}n^{-\alpha}\quad(n=1,2,\ldots),$$

где β и r — произвольные числа такие, что $\beta>\lambda$, $r\geqslant\alpha$, $c(m,\alpha,\beta,r)$ — постоянная, зависящая только от выписанных аргументов, а функция $g(\vartheta)$ определяется из условий (2).

При доказательстве достаточности можно потребовать выполнения соотношения (4) лишь для некоторого фиксированного $\beta>0$.

В теореме 1, как и во всех приводимых теоремах, условие $\beta>\lambda$ является существенным. При доказательствах мы опираемся на известный факт, что чезаровские средние порядка $\beta>\lambda$ ряда (1) равномерно ограничены по норме пространства X (см. ([1]), стр. 212). Можно однако убедиться, что для равномерной ограниченности указанных чезаровских средних условие $\beta>\lambda$ существенно в пространствах C и L_1, но не в L_p $(1<p<\infty)$. Поэтому если для некоторого $1<p<\infty$ удастся доказать равномерную ограниченность чезаровских средних ряда (1) порядка γ по норме пространства L_p, то во всех теоремах настоящей статьи, при $X=L_p$, β можно будет заменить числом γ.

Теорема 2. *Для двух функций $f(\vartheta)$ и $g(\vartheta)$, $\vartheta\in\Omega_m$, принадлежащих пространству X, соотношения*

$$-(\beta n)^r\,Y_n^{(m)}(f,\vartheta)=Y_n^{(m)}(g,\vartheta)\quad(n=0,1,\ldots);$$

$$\|N^r\,[Z_N^{\beta,r}(f)-f]-g\|_X=o(1)\quad(N\to\infty),$$

где β и r — любые вещественные числа такие, что $\beta>\lambda$, $r>0$, являются эквивалентными.

Теорема 3. *Линейный метод $Z_n^{\beta,r}(f,\vartheta)$, где β и r — любые вещественные числа такие, что $\beta>\lambda$, $r>0$, в пространстве X насыщен с порядком насыщения, равным n^{-r}, а класс функций $H(X,n^r)$ является его классом насыщения.*

При $r=1$ сформулированные теоремы были доказаны Беренсом, Бутцером и Павелке (см. ([1]), стр. 248—251). Введение в суммах (3) вместо $r=1$ произвольного вещественного показателя $r>0$ сильно затрудняет их исследование. Для доказательства приведенных теорем мы пользовались методами, отличными от примененных в ([1]).

Из теоремы 1 следует, что наилучшее приближение функции $f(\vartheta)\in\in H(X,n^\alpha)$, $\alpha>0$, гиперсферическими полиномами порядка не выше n, т. е. линейными комбинациями произвольных гиперсферических гармоник порядков $0\leqslant k\leqslant n$, оценивается сверху выражением, имеющим порядок $n^{-\alpha}$. Можно показать, что эта оценка не является завышенной в смысле порядка при $n\to\infty$ на всем классе $H(X,n^\alpha)$. Поэтому в силу теоремы 3 можно сказать, что метод $Z_n^{\beta,r}(f,\vartheta)$, $r>0$, $\beta>\lambda$, в классе функций $H(X,n^r)$ насыщен с порядком насыщения, равным порядку наилучшего приближения (в случае, когда $X=C$ или $X=L_1$).

Когда $m=2$, ряд (1) превращается в ряд Фурье 2π-периодической функции $f(\theta)$ одного переменного. В этом случае для сумм (3) при $\beta=1$ и натуральных значениях числа r, т. е. для нормальных средних Зигмунда ряда Фурье функции $f(\theta)$, теоремы приведенных типов были получены Бутцером и Павелке ([4]).

Если две функции $f(\vartheta)$ и $g(\vartheta)$, $\vartheta\in\Omega_m$, связаны соотношением (2), где $\varphi(n)=n^\alpha$ $(\alpha>0)$, мы будем писать, что $g=H^\alpha f$.

Теорема 4. *Пусть* β, r *и* l — *произвольные вещественные числа такие, что* r, $l>0$, *а* $\beta>\lambda$. *Необходимое и достаточное условие принадлежности функции* $f(\vartheta)$ *классу* $H(X, n^r)$ *заключается в выполнении условия*

$$\|H^r[Z_n^{\beta,l}(f)]\|_X=O(1). \tag{5}$$

При доказательстве достаточности здесь требуется справедливость оценки (5) лишь для некоторых фиксированных l и $\beta>0$. Несколько схожая теорема при $m=2$, $\beta=1$ и натуральных r имеется в ([4]), стр. 180.

По аналогии со случаем одной переменной можно ввести новые суммы

$$Z_{n,2}^{\beta,r}(f,\vartheta)=\sum_{\nu=0}^{n}\left[1-\left(\frac{A_n^\beta-A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta}\right)^r\right]\left[1-\left(\frac{A_{n+1}^\beta-A_{n+1-\nu}^\beta}{A_{n+1}^\beta}\right)^r\right]Y_\nu^{(m)}(f,\vartheta),$$

совпадающие при $\beta=1$ с обычными риссовскими средними для ряда (1).

Можно показать, что в теореме 1 суммы $Z_n^{\beta,r}(f)$ можно заменить через $Z_{n,2}^{\beta,r}(f)$ для любых $r>0$, $\beta>\lambda$. Это значит, что для указанных r и β соотношения (4) и

$$\|f-Z_{n,2}^{\beta,r}(f)\|_X=O(n^{-r})\quad(n\to\infty)$$

эквивалентны.

Вычислительный центр
Академии наук ГрузССР
Тбилиси

Поступило
20 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Berens, P. Butzer, S. Pawelke, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Ser. A, 4, № 2 (1968). [2] Д. К. Угулава, Сообщ. АН ГрузССР, 58, № 2 (1970). [3] A. Zygmund, Duke Math. J., 12, 4 (1945). [4] P. Butzer, S. Pawelke, Acta Sci. Math., 28, 1—2 (1967).