УДК 512.542

Л. П. АВДАШКОВА[1], С. Ф. КАМОРНИКОВ[2], О. Л. ШЕМЕТКОВА[3]

ОБ ОДНОМ СТВОЙСТВЕ ПОДГРУПП ФРАТТИНИЕВА ТИПА

[1]Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации
[2]Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»
[3]Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова (Москва, Россия)

(Поступила в редакцию 10.12.2013)

Хорошо известно (см., напр., [1]), что если N – нормальная подгруппа конечной группы G, то подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ подгруппы N содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. В связи с этим результатом Л. А. Шеметковым была предложена задача нахождения других подгрупп фраттиниева типа, обладающих описанным свойством. Один из вариантов этой задачи зафиксирован в работе [2] как вопрос 4.4.10:

для каких регулярных т-функторов θ *выполняется включение* $\Phi_\theta(N)\subseteq\Phi_\theta(G)$ *для каждой конечной группы G и любой ее нормальной подгруппы N?*

Простые примеры показывают, что существуют подгрупповые m-функторы θ, для которых θ-подгруппа Фраттини не обладает отмеченным свойством вложения. В частности, это имеет место для подгруппового m-функтора θ, который сопоставляет каждой группе саму группу и множество всех ее ненормальных максимальных подгрупп. В этом случае для любой разрешимой примитивной группы G непростого порядка и ее единственной минимальной нормальной подгруппы N, очевидно, выполняются равенства $\Phi_\theta(G) = 1$ и $\Phi_\theta(N) = N$. Поэтому $\Phi_\theta(N)$ не содержится в $\Phi_\theta(G)$.

В данной работе приводится характеризация подгрупповых m-функторов, удовлетворяющих условиям вопроса 4.4.10, и строятся серии подгрупп фраттиниева типа со свойством $\Phi_\theta(N)\subseteq\Phi_\theta(G)$.

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1] и [2]. Для удобства читателя приведем основные из них. Центральное место в работе занимает понятие подгруппового функтора, которое введено А. Н. Скибой в монографии [3].

Пусть A, B – группы, φ: $A \to B$ – эпиморфизм. И пусть Ω и Σ – некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. Обозначим через Ω^φ множество $\{ H^\varphi \mid H \in \Omega \}$ всех образов в B всех подгрупп из Ω, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество $\{ H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma \}$ всех полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Пусть $\boldsymbol{X}$ – непустой класс конечных групп. Отображение θ, сопоставляющее каждой группе $G\in\boldsymbol{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым* $\boldsymbol{X}$*-функтором* (или, иначе, *подгрупповым функтором на* $\boldsymbol{X}$), если для любого изоморфизма φ каждой группы $G\in\boldsymbol{X}$ выполняется равенство $(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$.

Если $\boldsymbol{X}$ – класс всех групп, то, следуя [2], подгрупповой $\boldsymbol{X}$-функтор будем называть просто *подгрупповым функтором*. *Разрешимым подгрупповым функтором* будем называть подгрупповой $\boldsymbol{X}$-функтор, если $\boldsymbol{X}$ – класс всех разрешимых групп.

Подгрупповой $\boldsymbol{X}$-функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма φ: $A\to B$, где A, $B\in\boldsymbol{X}$, имеют место включения $(\theta(A))^\varphi \subseteq\theta(B)$, $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ и, кроме того, $G\in\theta(G)$ для любой группы G из $\boldsymbol{X}$. В случае, когда класс $\boldsymbol{X}$ является гомоморфом (т. е. $\boldsymbol{X}$ замкнут относительно взятия факторгрупп), регулярность подгруппового $\boldsymbol{X}$-функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы $G\in\boldsymbol{X}$ всегда выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ следует $H \in \theta(G)$.

Пусть θ – подгрупповой функтор на $\boldsymbol{X}$, который выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, содержащее группу G и некоторые ее максимальные подгруппы. Следуя [2], этот $\boldsymbol{X}$-функтор будем называть *подгрупповым m-функтором на* $\boldsymbol{X}$ или просто *m-функтором на* $\boldsymbol{X}$. С учетом изложенного выше вполне понятны термины *подгрупповой m-функтор* ($\boldsymbol{X}$ – класс всех групп) и *разрешимый подгрупповой m-функтор* ($\boldsymbol{X}$ – класс всех разрешимых групп).

Пусть θ – подгрупповой m-функтор на $\boldsymbol{X}$. Для группы $G \in \boldsymbol{X}$ обозначим через $\Phi_\theta(G)$ и будем называть θ-*подгруппой Фраттини* (или *обобщенной подгруппой Фраттини*) пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$.

Отметим, что определение θ-подгруппы Фраттини корректно, так как для любой группы $G \in \boldsymbol{X}$ множество $\theta(G)$ определено и содержит по крайней мере одну подгруппу, а именно, подгруппу G. При этом $\Phi_\theta(G) = G$ тогда и только тогда, когда $\theta(G) = \{G\}$. Кроме того, так как для группы G множество $\theta(G)$ автоморфно допустимо, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G.

Ключевую роль в данной работе играет следующее

О п р е д е л е н и е. Пусть $\boldsymbol{X}$ – непустой класс групп, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп. Подгрупповой m-функтор θ на $\boldsymbol{X}$ называется *нормально вложенным* (или *S_n-вложенным*), если для любой группы $G \in \boldsymbol{X}$ и каждой ее нормальной подгруппы N всегда из $M \in \theta(G)$ и $M \cap N \neq N$ следует, что найдется подгруппа $H \in \theta(N)$, отличная от N, для которой $M \cap N \subseteq H$.

Л е м м а 1. *Пусть M и S – максимальные подгруппы группы G, дополняющие ее абелев главный фактор N/K. Если θ – регулярный m-функтор и $M \in \theta(G)$, то $S \in \theta(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Рассмотрим группу G/K. В ней максимальные подгруппы M/K и S/K дополняют абелеву минимальную нормальную подгруппу N/K. Так как подгрупповой m-функтор θ регулярен, то $M/K \in \theta(G/K)$. Если $K \neq 1$, то ввиду выбора группы G имеем, что $S/K \in \theta(G/K)$. Но тогда снова из регулярности θ имеем $S \in \theta(G)$. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Итак, $K = 1$ и N – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, дополняемая максимальными подгруппами M и S. Пусть φ_1: $m \mapsto Nm$, где $m \in M$, – естественный изоморфизм групп M и $MN/N = G/N$, а φ_2: $s \mapsto Ns$, где $s \in S$, – естественный изоморфизм групп S и $SN/N = G/N$.

Рассмотрим отображение φ подгруппы M в подгруппу S, равное композиции отображений φ_2^{-1} и φ_1, т. е. $\varphi(m) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(m))$. Очевидно, отображение φ является изоморфизмом подгрупп M и S.

Так как $G = NM$ и $N \cap M = 1$, то, очевидно, каждый элемент x группы G единственным образом представим в виде $x = nm$, где $n \in N$, $m \in M$. В частности, элемент m единственным образом представим в виде $m = n^*s$, где $n^* \in N$ и $s \in S$. Тогда

$$\varphi(m) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(m)) = \varphi_2^{-1}(Nm) = \varphi_2^{-1}(Ns) = s.$$

Из равенства $m = n^*s$ следует также, что $Nm = N\varphi(m)$. Поэтому $m(\varphi(m))^{-1} \in N$. Так как подгруппа N является абелевой, то $n^{m(\varphi(m))^{-1}} = n$ для любого элемента $n \in N$. Отсюда имеем, что $n^m = n^{\varphi(m)}$ для любого элемента $n \in N$.

Рассмотрим отображение f: $nm \mapsto n\varphi(m)$. Покажем, что f – автоморфизм группы G. Пусть x, y – произвольные элементы из G. Тогда $x = n_1m_1$, $y = n_2m_2$, где $n_1, n_2 \in N$, $m_1, m_2 \in M$. Поэтому

$$xy = (n_1m_1)(n_2m_2) = \left(n_1n_2^{m_1^{-1}}\right)(m_1m_2),$$

а значит,

$$f(xy) = \left(n_1n_2^{m_1^{-1}}\right)\varphi(m_1m_2) = \left(n_1n_2^{m_1^{-1}}\right)\varphi(m_1)\varphi(m_2).$$

С другой стороны,

$$f(x)f(y) = (n_1\,\varphi(m_1))(n_2\,\varphi(m_2)) = \left(n_1n_2^{\varphi(m_1^{-1})}\right)(\varphi(m_1)\varphi(m_2)).$$

Так как $n_2^{m_1^{-1}} = n_2^{\varphi(m_1^{-1})}$, то $f(xy) = f(x)f(y)$. При этом отображение f является биективным. Значит, $f \in \mathrm{Aut}(G)$.

Так как θ – подгрупповой m-функтор, то выполняется равенство $(\theta(G))^f = \theta(G^f) = = \theta(G)$. Поэтому $M^f = \varphi(M) = S \in \theta(G)$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* θ *– нормально вложенный подгрупповой m-функтор, то* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ *для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N*;

2) *если* θ *– разрешимый регулярный m-функтор и для любой разрешимой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$, *то* θ *является нормально вложенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть θ – нормально вложенный подгрупповой m-функтор. Покажем, что в этом случае для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Обозначим $\Phi_\theta(N)$ через K. Предположим, что K не содержится в $\Phi_\theta(G)$. Тогда в $\theta(G)$ найдется некоторая максимальная подгруппа M, которая не содержит K. Из максимальности M следует, что $KM = G$. Поэтому ввиду тождества Дедекинда $N = K(N \cap M)$. Так как $K \cap M$ – собственная подгруппа из N, то из нормальной вложенности m-функтора θ следует, что найдется максимальная подгруппа $H \in \theta(N)$, содержащая $N \cap M$. Но тогда справедливо равенство

$$N = K(N \cap M) = KH = H.$$

Пришли к противоречию с тем, что H – собственная подгруппа из N.

Таким образом, если θ – нормально вложенный подгрупповой m-функтор, то для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N имеет место включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$.

2) Пусть теперь θ – разрешимый регулярный m-функтор и для любой разрешимой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Покажем, что подгрупповой m-функтор θ является нормально вложенным.

Предположим, что утверждение не верно, т. е. подгрупповой m-функтор θ не является нормально вложенным. Тогда найдется по крайней мере одна разрешимая группа G, которая обладает нормальной подгруппой N и такой максимальной подгруппой M, принадлежащей $\theta(G)$, что M не содержит N, а все максимальные подгруппы из N, содержащие $M \cap N$, не принадлежат $\theta(N)$. Среди всех таких групп G выберем группу наименьшего порядка.

Пусть $L = \mathrm{Core}_G(M) \cap N$. И пусть K/L – такой главный фактор группы G, что $K \subseteq N$. Тогда K не содержится в M и из разрешимости группы G следует, что $G/L = (M/L)(K/L)$ и $(M/L) \cap (K/L) = 1$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $L \neq 1$. Тогда из регулярности m-функтора θ имеем, что $M/L \in \theta(G/L)$. Кроме того, M/L не содержит N/L. Поэтому, ввиду выбора группы G, найдется такая максимальная подгруппа H/L группы N/L, принадлежащая $\theta(N/L)$, что

$$(M/L) \cap (N/L) \subseteq H/L.$$

Так как m-функтор θ является регулярным, то $H \in \theta(N)$. Пришли к противоречию с выбором группы G.

2) Пусть теперь $L = 1$. Тогда K – минимальная нормальная подгруппа группы G. При этом $MK = G$ и $M \cap K = 1$. Поэтому $(M \cap N)K = N$ и $(M \cap N) \cap K = 1$. Ввиду утверждения А.4.13 из [1], $K \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы N, не содержащая K. Тогда в K найдется такая минимальная нормальная подгруппа V группы N, что $HV = N$ и $H \cap V = 1$. Так как $K \subseteq \mathrm{Soc}(N)$, то $K = V \times V^*$, где V^* – нормальная подгруппа группы N. Простая проверка показывает, что $(M \cap N)V^*$ – максимальная подгруппа группы N. Так как $M \cap N \subseteq (M \cap N)V^*$, то $(M \cap N)V^* \notin \theta(N)$. А так как максимальная подгруппа $(M \cap N)V^*$ дополняет V, то на основании леммы 1 имеем, что H не принадлежит множеству $\theta(N)$.

Итак, все θ-подгруппы группы N, отличные от N, содержат K. Значит, $K \subseteq \Phi_\theta(N)$. Отсюда и из условия $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ имеем $K \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть θ – разрешимый регулярный подгрупповой m-функтор. Тогда и только тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N, когда m-функтор θ является нормально вложенным.*

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть θ – отображение, сопоставляющее каждой группе G саму группу G и множество всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на числа из π. Так как для любого изоморфизма φ: $G \to G^\varphi$ и каждой максимальной подгруппы M группы G справедливо равенство $|G : M| = |G^\varphi : M^\varphi|$, то θ – подгрупповой m-функтор. Проверка показывает, что m-функтор θ является нормально вложенным. Будем обозначать далее подгруппу $\Phi_\theta(G)$ через $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, θ-подгруппа Фраттини группы G совпадает с введенной Дескинсом в [4] подгруппой $\Phi_p(G)$.

С л е д с т в и е 2. *Для любого множества π простых чисел, любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi_\pi(N) \subseteq \Phi_\pi(G)$.*

Если π – множество простых чисел, то через π^n обозначим множество n-ых степеней всех простых чисел из π. Пусть θ – подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G все максимальные подгруппы, индексы которых принадлежат множеству $(\bigcup_{1\le i\le n}\pi^i)$. Обобщенную θ-подгруппу Фраттини группы G в этом случае будем обозначать через $\Phi^n_\pi(G)$. Если же $\pi = \mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, то вместо $\Phi^n_\pi(G)$ будем писать $\Phi^n(G)$. В частности, $\Phi^1(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G, имеющих простой индекс. Проверка показывает, что m-функтор θ, выделяющий в каждой группе G все максимальные подгруппы, индексы которых принадлежат множеству $(\bigcup_{1\le i\le n}\pi^i)$, вляется нормально вложенным.

С л е д с т в и е 3. *Для любого натурального числа n, любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi^n(N) \subseteq \Phi^n(G)$.*

С л е д с т в и е 4. *Для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi^1(N) \subseteq \Phi^1(G)$.*

Напомним, что класс групп $\boldsymbol{X}$ называется *нормально наследственным* (или *S_n-замкнутым*), если всегда из $G \in \boldsymbol{X}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \boldsymbol{X}$.

Класс групп $\boldsymbol{F}$ называется *классом Фиттинга* (или *радикальным классом*), если выполняются следующие условия:

1) $\boldsymbol{F}$ – нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \boldsymbol{F}$, $B \in \boldsymbol{F}$, всегда следует, что $G \in \boldsymbol{F}$.

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда ***F****-радикалом* группы G называется наибольшая нормальная подгруппа из G, принадлежащая $\boldsymbol{F}$ (из определения класса Фиттинга следует, что такая подгруппа существует в любой группе; она совпадает с произведением всех нормальных $\boldsymbol{F}$-подгрупп из G). В дальнейшем $\boldsymbol{F}$-радикал группы G обозначается через $G_{\boldsymbol{F}}$.

Следующая лемма устанавливает простейшие свойства $\boldsymbol{F}$-радикала группы. Доказательство ее можно найти в работе [1].

Л е м м а 2. *Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустой класс Фиттинга, N – субнормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $N_{\boldsymbol{F}} = N \cap G_{\boldsymbol{F}}$;

2) $G_{\boldsymbol{F}} = \langle K \mid K \in \mathrm{sn}(G),\ K \in \boldsymbol{F}\rangle$.

Пусть $\boldsymbol{F}$ – непустой класс групп. Подгруппа V группы G называется ***F****-инъектором,* если для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является $\boldsymbol{F}$-максимальной подгруппой в N.

Как показано в работе [5], для любого класса Фиттинга $\boldsymbol{F}$ в каждой конечной разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\boldsymbol{F}$-инъекторов.

Если V – $\boldsymbol{F}$-инъектор группы, то для всех $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ подгруппа V^α является $\boldsymbol{F}$-инъектором. Поэтому отображение θ, выделяющее в каждой группе G саму группу G и все ее максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один $\boldsymbol{F}$-инъектор, является подгрупповым m-функтором.

Подгрупповым m-функтором будет и отображение θ, выделяющее в каждой группе G множество подгрупп, содержащее G и все те максимальные подгруппы группы G, которые содержат $\boldsymbol{F}$-радикал $G_{\boldsymbol{F}}$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– непустой класс Фиттинга и* θ *– m-функтор, выделяющий в каждой группе множество подгрупп, содержащее саму группу и все те максимальные подгруппы, которые содержат ее* $\boldsymbol{F}$*-радикал. Тогда* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ *для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 2 справедливо равенство $N_{\boldsymbol{F}} = N \cap G_{\boldsymbol{F}}$. Поэтому, если $M \in \theta(G)$ и подгруппа N не содержится в M, то $N_{\boldsymbol{F}} = N \cap G_{\boldsymbol{F}} \subseteq N \cap M$. Пусть H – максимальная подгруппа группы N, содержащая $N \cap M$. Тогда $N_{\boldsymbol{F}} \subseteq H$, а значит, $H \in \theta(N)$. Следовательно, подгрупповой m-функтор θ является нормально вложенным. Отсюда, ввиду теоремы 1, следует, что $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Предложение доказано.

Если $\boldsymbol{F}$ – класс всех нильпотентных групп, то $G_{\boldsymbol{F}} = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Поэтому частным случаем предложения 1 является следующий результат.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* θ *– m-функтор, выделяющий в каждой группе множество подгрупп, содержащее саму группу и все те максимальные подгруппы, которые содержат ее подгруппу Фиттинга. Тогда* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ *для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N.*

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $\boldsymbol{F}$ *– непустой класс Фиттинга, а* θ *– подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один* $\boldsymbol{F}$*-инъектор группы. Тогда* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ *для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, принадлежащая $\theta(G)$. Тогда M содержит некоторый $\boldsymbol{F}$-инъектор V группы G. Из определения $\boldsymbol{F}$-инъектора следует, что $V \cap N$ – $\boldsymbol{F}$-инъектор подгруппы N. Поэтому, если N не содержится в M, то каждая максимальная подгруппа H группы N, содержащая $N \cap M$, принадлежит $\theta(N)$, т. е. подгрупповой m-функтор θ является нормально вложенным. Отсюда на основании теоремы 1 следует, что $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Предложение доказано.

Если $\boldsymbol{F}$ – класс всех нильпотентных групп, то частным случаем предложения 3 является следующий результат.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* θ *– подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один нильпотентный инъектор группы. Тогда* $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ *для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N.*

Приведем еще одно свойство вложенных подгрупповых m-функторов.

Т е о р е м а 2. *Пусть* θ *– регулярный нормально вложенный подгрупповой m-функтор. Тогда*

$$\Phi_\theta(G_1 \times \ldots \times G_n) = \Phi_\theta(G_1) \times \ldots \times \Phi_\theta(G_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $D = G_1 \times \ldots \times G_n$. Так как подгруппа G_i нормальна в D, то ввиду теоремы 1 имеем $\Phi_\theta(G_i) \subseteq \Phi_\theta(D)$. Следовательно,

$$\Phi_\theta(G_1) \times \ldots \times \Phi_\theta(G_n) \subseteq \Phi_\theta(D). \tag{*}$$

Пусть $K_i = G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n$. Очевидно, имеет место включение $\Phi_\theta(D)K_i / K_i \subseteq \Phi_\theta(D / K_i)$. Так как $D / K_i = G_iK_i / K_i \cong G_i$, то справедливо равенство $\Phi_\theta(D / K_i) = \Phi_\theta(G_i)K_i / K_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $|\Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_i| \leq |\Phi_\theta(G_i)|$.

Так как $K_1 \cap \ldots \cap K_n = 1$, то ввиду леммы A.4.17 из [1] подгруппа $\Phi_\theta(D)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $\Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_1, \ldots, \Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_n$. Отсюда следует, что

$$|\Phi_\theta(D)| \leq |\Phi_\theta(G_1)| \cdot \ldots \cdot |\Phi_\theta(G_n)| = |\Phi_\theta(G_1) \times \ldots \times \Phi_\theta(G_n)|.$$

Теперь, сравнивая порядки подгрупп $\Phi_\theta(D)$ и $\Phi_\theta(G_1) \times \ldots \times \Phi_\theta(G_n)$, из включения (*) получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 5. *Для любого множества* π *простых чисел справедливо равенство* $\Phi_\pi(G_1 \times \ldots \times G_n) = \Phi_\pi(G_1) \times \ldots \times \Phi_\pi(G_n)$.

С л е д с т в и е 6. *Для любого натурального числа* k *справедливо равенство* $\Phi^k(G_1 \times \ldots \times G_n) = \Phi^k(G_1) \times \ldots \times \Phi^k(G_n)$.

Литература

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
2. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
3. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
4. *Deskins W. E.* // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, N 2. P. 306–313.
5. *Fischer B., Gaschűtz W., Hartley B.* // Math. Z. 1967. Bd. 102. S. 337–339.

L. P. AVDASHKOVA, S. F. KAMORNIKOV, O. L. SHEMETKOVA

ON A PROPERTY OF FRATTINI-LIKE SUBGROUPS

Summary

In the article some properties of Frattini-like subgroups of finite groups are investigated.