С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О разрешимости и сверхразрешимости конечных групп, *Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 2, 312–320

DOI: 10.33048/smzh.2023.64.206

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2023. Том 64, № 2

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Приводятся достаточные признаки разрешимости и сверхразрешимости конечной группы G при условии, что все максимальные подгруппы некоторых силовских подгрупп группы G наследственно G-перестановочны либо G-перестановочны в G.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.206

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, максимальная подгруппа, G-перестановочная подгруппа, наследственно G-перестановочная подгруппа.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Развивая концепцию квазиперестановочной подгруппы, В. Го, А. Н. Скиба и К. П. Шам в [1] ввели следующие два определения.

Определение 1. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда A называется:

(1) *X-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$;

(2) *наследственно X-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in X \cap \langle A, B\rangle$.

Определение 2. Подгруппа A группы G называется (*наследственно*) *X-перестановочной в G*, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Как показали дальнейшие исследования, концепции X-перестановочности и наследственной X-перестановочности оказались весьма полезными для изучения нормального строения конечной группы и получения критериев ее непростоты. Один из первых результатов, относящихся к этому направлению, был предложен Сринивасаном, доказавшим в [2] сверхразрешимость группы G при условии, что все максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп нормальны. В [3] требование нормальности максимальных подгрупп из силовских подгрупп группы G было ослаблено до их перестановочности в G. Напомним, что подгруппа A группы G называется *перестановочной* с подгруппой B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [4] или *квазинормальной* [5] подгруппой группы G.

Позже результаты работ [3, 4] неоднократно обобщались (см., например, [6]). При этом практически всегда прямо или косвенно использовалось условие

Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ–237).

разрешимости или частичной разрешимости группы G. В связи с этим представляют интерес следующие два вопроса, первый из которых сформулирован в [3].

Вопрос 1. *Верно ли, что группа G разрешима, если все ее максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп G-перестановочны в G?*

Вопрос 2. *Верно ли, что группа G разрешима, если все ее максимальные подгруппы всех ее силовских подгрупп наследственно G-перестановочны в G?*

Ответ на первый вопрос отрицательный. Существуют простые неабелевы группы (в частности A_5), в которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп G-перестановочны.

Второй вопрос более естествен, поскольку отношение наследственной G-перестановочности (как и стимулировавшие его отношения нормальности и перестановочности) наследуется в подгруппах. В теореме 1 данной работы дается положительный ответ на вопрос 2.

Теорема 1. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из S наследственно G-перестановочна в G, то G разрешима.*

Простые примеры (в частности A_5) показывают, что в общем случае силовскую 2-подгруппу группы G в теореме 1 нельзя заменить силовской p-подгруппой, где p — нечетное простое число.

В случае, когда группа G частично разрешима, условие наследственной G-перестановочности максимальных подгрупп из силовской подгруппы в теореме 1 может быть ослаблено до G-перестановочности, а ее заключение значительно усилено.

Теорема 2. *Пусть S — силовская p-подгруппа p-разрешимой группы G. Если каждая максимальная подгруппа из S G-перестановочна в G, то группа G p-сверхразрешима.*

Напомним, что группа G называется *p-сверхразрешимой* (p — простое число), если она обладает главным рядом, все главные факторы которого либо являются p'-группами, либо имеют порядок p.

1. Используемая терминология

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [4].

Если G — группа и p — простое число, то $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп из G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G. Через Z_n обозначается циклическая группа порядка n.

Если π — некоторое множество простых чисел, то E_π-группа — это группа, обладающая холловой π-подгруппой.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения: $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B; $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Если A и B — подгруппы порядка n и m соответственно, то с учетом изложенного понятно обозначение $n : m$.

Минимальная неразрешимая группа — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [7]. Этот список содержит следующие группы:

- $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
- $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;
- $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$;
- $PSL_3(3)$;
- $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [8, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

2. Предварительные результаты

Отметим следующее свойство G-перестановочных подгрупп, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. *Пусть G — группа, H, T и K — ее подгруппы, причем подгруппа K нормальна в G. Если $K\subseteq T$ и H G-перестановочна с T, то HK/K G/K-перестановочна с T/K. В частности, если подгруппа H наследственно G-перестановочна в G, то подгруппа HK/K наследственно G/K-перестановочна в G/K.*

Лемма 2. *Пусть G — простая группа лиева типа над полем нечетной характеристики p. Если G содержит подгруппу H такую, что $|G:H|=2^l$, где $l\geq 3$, то $G\cong PSL_2(p)$ и p — простое число Мерсенна.*

Доказательство. Из [9, теорема 1] следует, что $G\cong PSL_n(q)$ $(q=p^m)$, H — параболическая подгруппа группы G и

$$|G:H|=\frac{q^n-1}{q-1}=2^l$$

(n — простое число). Пусть сначала $n\geq 3$. Тогда имеет место равенство

$$\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1.$$

Так как n и q — нечетные числа, $q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1$ является нечетным числом, что невозможно.

Следовательно, $n=2$ и $G\cong PSL_2(q)$. Тогда индекс в G борелевской подгруппы $B\cong q:((q-1)/2)$ равен $q+1=2^l$ и $q=p$ — простое число Мерсенна.

Лемма доказана.

Будем говорить, что группа G *является контрпримером к теореме* 1, если все максимальные подгруппы некоторой ее силовской 2-подгруппы наследственно G-перестановочны в G, но сама группа G не разрешима. Если, кроме того, порядок группы G минимален, то G будем называть *минимальным контрпримером* к теореме 1.

Лемма 3. *Пусть G — минимальный контрпример к теореме* 1. *Если T — подгруппа из G и $|G:T|$ — нечетное число, то T разрешима.*

Доказательство. Так как $|G:T|$ — нечетное число, то силовская 2-подгруппа S подгруппы T является силовской 2-подгруппой группы G. Пусть

M — максимальная подгруппа из S. По условию M наследственно G-перестановочна в G. Но тогда M наследственно T-перестановочна в T. В силу минимальности контрпримера T — разрешимая группа.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — минимальный контрпример к теореме* 1. *Если T — подгруппа из G и $|G:T| = 2f$, где $(2, f) = 1$, то T разрешима.*

Доказательство. Если $M \in \mathrm{Syl}_2(T)$, то из условия $(2, f) = 1$ следует, что M — максимальная подгруппа в некоторой силовской 2-подгруппе группы G. Поэтому M T-перестановочна в T. Следовательно, группа T обладает свойством $E_{\{2,r\}}$ для всех $r \in \pi(T) \setminus \{2\}$. Тогда из [10] следует, что подгруппа T разрешима.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — минимальный контрпример к теореме 1. Если T — максимальная подгруппа из G и $|G : T| = 2^l f$, где $f \geq 1$, $(2, f) = 1$ и $l \geq 2$, то для всякой максимальной подгруппы M силовской 2-подгруппы группы G найдется $x \in G$ такой, что $G = MT^x$.*

Доказательство. Ввиду условия леммы для M найдется $x \in G$ такой, что MT^x — подгруппа группы G. Теперь из $l \geq 2$ следует, что $T^x \subset MT^x$. Так как подгруппа T максимальна в G, то $G = MT^x$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — минимальный контрпример к теореме.

Предположим сначала, что G является простой неабелевой группой, и проанализируем все возможные случаи.

1. G — простая спорадическая группа.

Согласно [11, следствие] простая спорадическая группа не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп, что противоречит условию теоремы.

2. $G \cong A_n$, $n \geq 5$.

Согласно [12, теорема] группа G не имеет собственных наследственно G-перестановочных подгрупп. Снова пришли к противоречию.

3. G — простая группа лиева типа над полем характеристики p.

Пусть сначала $p = 2$. Поскольку каждая собственная параболическая подгруппа группы G содержит силовскую 2-подгруппу группы G, из леммы 3 следует, что все параболические подгруппы группы G разрешимы.

Предположим, что группа G имеет лиевский ранг $l \geq 2$ и P — параболическая подгруппа в G. Согласно [13, предложения (2.1), (2.2)] имеет место разложение Леви $P = O_p(P)L_I H$, где H — подгруппа Картана, а L_I — центральное произведение групп Шевалле, каждая из которых находится по соответствующей связной компоненте диаграммы, полученной из диаграммы Дынкина группы G отбрасыванием вершин, входящих в I. По теореме 2.13 из [14] разрешимыми группами лиевского типа над полем характеристики 2 являются группы $A_1(2)$, ${}^2A_2(2)$ и ${}^2B_2(2)$. Все указанные группы имеют лиевский ранг 1, и, следовательно, группы лиевского ранга $l \geq 2$ неразрешимы. Если $l = 2$, то единственной простой неабелевой группой с разрешимыми параболическими подгруппами будет $SL_3(2)$ [15]. Из указанного строения параболических подгрупп следует, что при $l \geq 3$ всегда найдется максимальная параболическая подгруппа (полученная отбрасыванием одной вершины в диаграмме Дынкина), которая будет неразрешима. Если $l = 1$, то параболические подгруппы сопряжены с подгруппой Бореля и будут разрешимы. Таким образом,

$$G \in \{PSL_2(2^n),\ n \geq 2;\ PSU_3(2^n),\ n \geq 2;\ Sz(2^{2n+1}),\ n \geq 1;\ SL_3(2)\}.$$

Рассмотрим каждый случай.

(a) $G \cong SL_2(q) \cong SL_2(2^n)$, где $n \geq 2$.

Силовская 2-подгруппа группы G является элементарной абелевой порядка $q = 2^n$, и все инволюции в G сопряжены. Пусть $n = 2$. Тогда максимальные подгруппы из силовской 2-подгруппы группы G имеют порядок 2. Группа $SL_2(4)$ содержит максимальную подгруппу A_4. Отсюда по условию теоремы в A_4 должна существовать подгруппа порядка 6, что невозможно.

Таким образом, $n \geq 3$ и максимальные подгруппы силовской 2-подгруппы группы G имеют порядок не меньше 4. Кроме того, группа G имеет максимальную диэдральную подгруппу D порядка $2(q+1)$. По условию данная подгруппа перестановочна с некоторой 2-подгруппой M порядка не меньше 4. Тогда из максимальности D в G получаем, что $G = DM$. Последнее, очевидно, невозможно.

(b) $G \cong PSU_3(2^n)$, где $n \geq 2$.

Из [16, табл. 8.5] следует, что группа G имеет максимальную подгруппу

$$D \cong \frac{1}{(3, q+1)}(q+1)^2 : S_3.$$

Так как силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок $q^3 \geq 64$, любая ее максимальная подгруппа имеет порядок не меньше 32. Поэтому ввиду условия теоремы в G найдется 2-подгруппа, которая не содержится в D, такая, что $MD = DM$. Отсюда и из максимальности D в G следует, что $G = DM$. Последнее, очевидно, невозможно.

(c) $G \cong Sz(q) \cong Sz(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$.

Как следует из [17], группа G имеет максимальную подгруппу D порядка $4(q + \sqrt{2q} + 1)$, а силовская 2-подгруппа S группы G имеет порядок $q^2 \geq 64$. Следовательно, любая максимальная 2-подгруппа M силовской 2-подгруппы S имеет порядок не меньше 32. Отсюда, как и в случае (b), получаем, что $G = DM$. Последнее невозможно.

(d) $G \cong SL_3(2)$.

В этом случае из условия теоремы следует, что группа G должна содержать подгруппу $A(B : C)$, где $|A| = 4$, $B \cong Z_7$ и $C \cong Z_3$, что невозможно.

Пусть $p > 2$. Если в группе G найдется максимальная подгруппа T такая, что $|G : T| = 2^l f$, где $f \geq 1$, $(f, 2) = 1$ и $l \geq 2$, то из леммы 5 следует, что $G = ST$, где $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Таким образом, группа G имеет подгруппу примарного четного индекса. Согласно лемме 2 $G \cong PSL_2(p)$, где p — простое число Мерсенна. В частности, $p \geq 7$. Силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок $p + 1$, и, следовательно, ее максимальные подгруппы имеют порядок $(p+1)/2$. Унипотентная подгруппа $U \cong Z_p$ содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong p : ((p-1)/2)$, где $(p-1)/2$ — нечетное число. С другой стороны, силовская 2-подгруппа группы G имеет максимальную подгруппу M

такую, что $|M| = (p+1)/2 \geq 4$. Тогда по условию теоремы группа G имеет подгруппу UM, что невозможно.

Таким образом, для всякой максимальной подгруппы группы G выполняется либо условие леммы 3, либо условие леммы 4. Следовательно, все максимальные подгруппы группы G разрешимы, т. е. G — минимальная простая группа. Так как G определена над полем нечетной характеристики, из списка Томпсона следует, что возможен один из следующих случаев:

- $G \cong PSL_2(3^r)$, где r — простое число, большее 3;
- $G \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$;
- $G \cong PSL_3(3)$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

(a) $G \cong PSL_2(3^r)$, где r — простое число, большее 3.

Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и M — максимальная подгруппа из S. Если $|S| = 4$, то $|M| = 2$. Группа G содержит подгруппу $H \cong A_4$, и, следовательно, подгруппа порядка 2 из H H-перестановочна, что невозможно.

Таким образом, $|S| \geq 8$ и $|M| \geq 4$. Группа G содержит две максимальные диэдральные подгруппы D_1 и D_2 порядков 3^r-1 и 3^r+1 соответственно. Пусть $3^r-1 = 4t$, тогда $3^r+1 = 2(2t+1)$. Если $3^r+1 = 4t$, то $3^r-1 = 2(2t-1)$. Без ограничения общности можно считать, что $|D_1| = 2l$, где $(2,l) = 1$. По условию теоремы существует подгруппа D_1M, где $|M| \geq 4$. Так как подгруппа D_1 максимальна в G, то $D_1M = G$. Последнее невозможно.

(b) $G \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1 \equiv 0 \pmod 5$.

Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и M — максимальная подгруппа из S. Если $|S| = 4$, то $|M| = 2$. Группа G содержит подгруппу $H \cong A_4$, и, следовательно, подгруппа порядка 2 в H H-перестановочна, что невозможно.

Таким образом, $|S| \geq 8$ и $|M| \geq 4$. Пусть $G \cong PSL_2(7)$. В этом случае максимальные подгруппы из силовской 2-подгруппы группы G имеют порядок 4. Ввиду условия теоремы в G существует подгруппа $A(B:C)$, где $|A| = 4$, $B \cong Z_7$ и $C \cong Z_3$, что невозможно. В оставшихся случаях группа G содержит две максимальные диэдральные подгруппы D_1 и D_2 порядков $p-1$ и $p+1$ соответственно. Пусть $p-1 = 4t$, тогда $p+1 = 2(2t+1)$. Если $p+1 = 4t$, то $p-1 = 2(2t-1)$. Без ограничения общности можно считать, что $|D_1| = 2l$, где $(2,l) = 1$. Ввиду условия теоремы существует подгруппа D_1M, где $|M| \geq 4$. Так как подгруппа D_1 максимальна в G, то $D_1M = G$. Последнее невозможно.

(c) $G \cong PSL_3(3)$.

Группа G содержит максимальную подгруппу $D \cong 13:3$ (см., например, [15, с. 13]). Тогда по условию теоремы в G существует подгруппа DM, где M — максимальная подгруппа некоторой силовской 2-подгруппы из G. Так как подгруппа D максимальна в G, то $DM = G$, что невозможно.

Таким образом, G не является простой неабелевой группой. Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Покажем, что G/N является разрешимой группой. Если $|G:N|$ — нечетное число, то G/N разрешима по теореме Томпсона — Фейта. Пусть $|G:N| = 2t$, где $(2,t) = 1$. В этом случае силовская 2-подгруппа в G/N имеет порядок 2 и G/N будет разрешимой. Пусть $|G:N| = 2^l t$, где $l \geq 2$, $t \geq 1$ и $(2,t) = 1$. В силу леммы 1 все максимальные подгруппы всех силовских 2-подгрупп группы G/N наследственно G/N-перестановочны в G/N. Поэтому ввиду выбора группы G группа G/N разрешима.

Так как группа G/N разрешима, N — неабелева группа. Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы. Если $|G:N|$ — нечетное число, то силовская 2-подгруппа группы G содержится в N. Поскольку $|N| < |G|$, то N будет разрешимой группой, что невозможно. Пусть $|G:N| = 2t$, где $(2,t) = 1$. В этом случае силовская 2-подгруппа T группы N максимальна в силовской 2-подгруппе группы G. Так как T N-перестановочна, N обладает свойством $E_{\{2,f\}}$ для всех $f \in \pi(N) \setminus \{2\}$. Из [10] следует, что N — разрешимая группа. Снова пришли к противоречию. Значит, $|G:N| = 2^l t$, где $l \geq 2$, $t \geq 1$ и $(2,t) = 1$. Если $t \neq 1$, то в G найдется собственная подгруппа F нечетного индекса t, содержащая N. Поскольку $|F| < |G|$, подгруппа F разрешима. Но тогда и N — разрешимая группа; противоречие. Таким образом, $|G:N| = 2^l$, $l \geq 2$. В этом случае в G найдется максимальная подгруппа F, содержащая N, такая, что $|G:F| = 2$. Тем самым силовская 2-подгруппа T группы F максимальна в силовской 2-подгруппе группы G. Так как T F-перестановочна, F обладает свойством $E_{\{2,f\}}$ для всех $f \in \pi(F) \setminus \{2\}$. Снова применяя [10], имеем, что F — разрешимая группа. Поэтому подгруппа N также разрешима. Полученное противоречие доказывает разрешимость группы G.

4. Доказательство теоремы 2

Предположим, что теорема неверна. Пусть G — контрпример минимального порядка и N — минимальная нормальная подгруппа из G. Так как группа G p-разрешима, подгруппа N является либо абелевой p-подгруппой, либо p'-группой.

Пусть $P/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$, M/N — максимальная подгруппа из P/N и $M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$. Так как группа P/N примарна, из максимальности M/N в P/N следует, что $|P:M| = p$. Если P_p — силовская p-подгруппа группы P, содержащая M_p, то из

$$|P:M| = |P_pN|/|M_pN| = |P_p|/|M_p|$$

следует, что $|P_p : M_p| = p$, а значит, M_p — максимальная подгруппа группы $P_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$. По условию теоремы подгруппа M_p G-перестановочна в G, а потому ввиду леммы 1 подгруппа M/N G/N-перестановочна в G/N.

Таким образом, все максимальные подгруппы всех силовских p-подгрупп группы G/N G/N-перестановочны в G/N. Ввиду выбора группы G группа G/N p-сверхразрешима. Как отмечено в [18], класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией. Отсюда и из p-сверхразрешимости группы G/N следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Если N — p'-группа, то из p-сверхразрешимости группы G/N следует p-сверхразрешимость группы G.

Таким образом, N — абелева p-группа. Из равенства $\Phi(G) = 1$ следует, что в G найдется по крайней мере одна максимальная подгруппа, которая не содержит N. Пусть H — одна из таких максимальных подгрупп. Тогда $G = HN$. Поскольку подгруппа N абелева, то $H \cap N = 1$. Следовательно, $G = N : H$, а значит, $|N| = |G:H| = p^n$, где $n > 1$.

Пусть H_p — силовская p-подгруппа из H. Очевидно, H_p не содержит N и H_pN — силовская p-подгруппа группы G. Заключим подгруппу H_p в некоторую максимальную подгруппу D из H_pN. Понятно, что D не содержит N. Если $H_{p'}$ — холлова p'-подгруппа из H, то из условия теоремы следует, что $DH_{p'}^x = H_{p'}^x D$ для некоторого элемента $x \in G$, т. е. $DH_{p'}^x$ — подгруппа группы G.

Так как $\left|G : DH^x_{p'}\right| = p$, то $DH^x_{p'}$ — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что N не содержится в $DH^x_{p'}$. Тогда $DH^x_{p'}N = G$ и $DH^x_{p'} \cap N = 1$, а значит, $|N| = p$. Пришли к противоречию с тем, что $n > 1$. Следовательно, подгруппа N содержится в $DH^x_{p'}$. Но тогда N содержится в любой силовской p-подгруппе из $DH^x_{p'}$. В частности, $N \subseteq D$, что невозможно.

5. Следствия и заключительные замечания

Приведем некоторые следствия доказанных теорем.

Следствие 1. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из S наследственно G-перестановочна в G, то G 2-сверхразрешима.*

Следствие 2. *Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы разрешимой группы G G-перестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Концепция G-перестановочности имеет достаточно ясную интерпретацию на языке теории графов. Для подгруппы A из G пусть $[A]_G = \{A^x \mid x \in G\}$. Определим *граф перестановочности* $\Gamma_{\text{per}}(G)$ группы G как простой неориентированный граф, в котором множество всех вершин совпадает с множеством $Cl(G)$ всех классов сопряженных подгрупп группы G и пара $([A]_G, [B]_G)$ соединяется в $\Gamma_{\text{per}}(G)$ ребром тогда и только тогда, когда в $[A]_G$ найдется подгруппа, перестановочная с некоторой подгруппой из класса $[B]_G$.

Простая проверка показывает, что подгруппа A группы G G-перестановочна в G тогда и только тогда, когда вершина $[A]_G$ содержится в центре $Z(\Gamma_{\text{per}}(G))$ графа $\Gamma_{\text{per}}(G)$ (вершина графа называется *центральной*, если она смежна со всеми другими вершинами этого графа). Кроме того, подгруппа A будет наследственно G-перестановочной в G в том и только в том случае, когда вершина $[A]_E$ содержится в $Z(\Gamma_{\text{per}}(E))$ для каждой подгруппы $E \subseteq G$, содержащей A.

Следствие 3. *Если все вершины графа перестановочности $\Gamma_{\text{per}}(G)$ разрешимой группы G, индуцированные максимальными подгруппами силовских подгрупп из G, являются центральными, то группа G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
2. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35. P. 210–214.
3. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 527–539.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
5. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 431–460.
6. *Ramadan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // Acta Math. Hungar. 1992. V. 59, N 1–2. P. 107–110.
7. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383–437.
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
9. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 304–311.
10. *Тютянов В. Н.* К гипотезе Холла // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 986–995.
11. *Гальт А. А., Тютянов В. Н.* О существовании G-перестановочных подгрупп в простых спорадических группах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 831–841.

12. *Васильев А. Ф., Тютянов В. Н.* Знакопеременные группы с наследственно G-перестановочной подгруппой // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2012. № 5. С. 148–150.
13. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
14. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
15. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
16. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: London Math. Soc. Lect. Note Ser., 2013. V. 407.
17. *Suzuki M.* On a class double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.
18. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 28 августа 2022 г.
После доработки 2 декабря 2022 г.
Принята к публикации 10 января 2023 г.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Международный университет «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com