УДК 512.542

С. Ф. КАМОРНИКОВ

О РЕШЕТКЕ ПОДГРУПП ФРАТТИНИЕВА ТИПА

Международный институт трудовых и социальных отношений, Гомель

(*Поступила в редакцию 29.01.2010*)

Введение. До недавних пор подгруппы фраттиниева типа изучались лишь с позиции анализа их внутреннего строения. Конечно, и на этом пути предлагались подходы, обозревающие достаточно широкие семейства подгрупп фраттиниева типа. Отметим, в частности, формационное направление, связанное с введением понятия $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы и изучением пересечения $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ таких подгрупп в группе G [1–2], и арифметический подход, в рамках которого исследовались пересечения (например, $\Phi_p(G)$ и $\Phi_\pi(G)$) максимальных подгрупп заданного индекса [3–4].

В то же время связь подгрупп фраттиниева типа между собой, в контексте их решеточных свойств, практически не рассматривалась. Положение изменилось с выходом работ [5, 6], где, во-первых, введены регулярный подгрупповой m-функтор θ и подгруппа $\Phi_\theta(G)$ как собирательные образы инвариантной при гомоморфизмах системы максимальных подгрупп, с одной стороны, и подгруппы фраттиниева типа, с другой; во-вторых, описано строение и изучены свойства решетки M_{reg} всех регулярных m-функторов; в-третьих, подгруппа фраттиниева типа $\Phi_\theta(G)$ представлена как $\mathfrak{X}$-корадикал группы G относительно определенного класса групп $\mathfrak{X}$.

В данной работе изучаются свойства решетки $\Phi\mathrm{it}(G)$. При этом рассматриваются произвольные конечные группы, т. е. всегда под группой подразумевается конечная группа. Нами используются определения и обозначения, принятые в [5, 7]. Наиболее часто встречающиеся здесь понятия мы определяем по ходу изложения материала.

Подгруппы фраттиниева типа. Согласно [5], подгрупповым m-функтором называется функция θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G. При этом предполагается, что если $\theta(G)=\{M_1,\dots,M_n,G\}$, то $\theta(G^\alpha)=\{M_1^\alpha,\dots,M_n^\alpha,G^\alpha\}$ для любого изоморфизма $\alpha: G\to G^\alpha$.

Подгрупповой m-функтор θ называется регулярным, если выполняются следующие условия:

1) из $N \lhd G$ и $M\in\theta(G)$ следуем $MN/N\in\theta(G/N)$;

2) из $M/N\in\theta(G/N)$ следует $M\in\theta(G)$.

Множество всех регулярных m-функторов обозначим через M_{reg}. На этом множестве определим операции пересечения и объединения m-функторов, полагая

$$(\theta_1\cap\theta_2)(G)=\theta_1(G)\cap\theta_2(G),$$
$$(\theta_1\cup\theta_2)(G)=\theta_1(G)\cup\theta_2(G)$$

для любой группы G. Как показано в [5], m-функторы $\bigcap_{i\in I}\theta_i$ и $\bigcup_{i\in I}\theta_i$ регулярны и являются в M_{reg} соответственно нижней и верхней гранью множества $\{\theta_i \mid i\in I\}$. Таким образом, M_{reg} –

полная, бесконечно дистрибутивная решетка относительно частичного порядка, определяемого теоретико-множественным включением. Минимальным элементом (нулем) этой решетки является m-функтор θ такой, что $\theta(G)=\{G\}$ для любой группы G. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает m-функтор, выделяющий в каждой группе саму группу G и все ее максимальные подгруппы.

Если θ – регулярный подгрупповой m-функтор, то через $\Phi_\theta(G)$ обозначим θ-подгруппу Фраттини группы G, равную пересечению всех подгрупп, принадлежащих $\theta(G)$. Так как множество всех максимальных подгрупп группы G автоморфно допустимо, т. е. $M^\alpha \in \theta(G)$ для каждой подгруппы M из $\theta(G)$, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G.

Будем говорить, что подгруппа N группы G является подгруппой фраттиниева типа, если $N=\Phi_\theta(G)$ для некоторого m-функтора $\theta \in M_{\text{reg}}$. Множество всех подгрупп фраттиниева типа из G обозначим через $\Phi\text{it}(G)$. Таким образом, $\Phi\text{it}(G)=\{\Phi_\theta(G) \mid \theta \in M_{\text{reg}}\}$.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Л е м м а 1. *Если θ и τ – регулярные подгрупповые m-функторы, то для любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta\cup\tau}(G)=\Phi_\theta(G)\cap\Phi_\tau(G)$.*

Из леммы 1 следует, что множество $\Phi\text{it}(G)$, частично упорядоченное по включению, является нижней полурешеткой, а следовательно, и полной решеткой. Нулем этой решетки является подгруппа Фраттини $\Phi(G)$, а единицей – сама группа G. В дальнейшем точную верхнюю грань элементов N_1 и N_2 из $\Phi\text{it}(G)$ будем обозначать $N_1 \vee_\Phi N_2$.

На основании леммы 1 для отображения $f:\theta \mapsto \Phi_\theta(G)$ решетки M_{reg} в решетку $\Phi\text{it}(G)$ выполняется равенство $f(\theta_1\cup\theta_2)=f(\theta_1)\cap f(\theta_2)$. В то же время не всегда выполняется равенство $f(\theta\cap\tau)=\Phi_{\theta\cap\tau}(G)=f(\theta)\vee_\Phi f(\tau)$. Отсюда, в частности, решетка $\Phi\text{it}(G)$ не является подрешеткой решетки всех нормальных подгрупп группы G.

Подгруппа фраттиниева типа как корадикал группы. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Следуя [7], через $\mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ обозначим класс всех конечных подпрямых произведений групп из $\mathfrak{X}$. Понятно, что $G\in \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G имеются нормальные подгруппы N_i ($i=1, \ldots, t$), для которых $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\bigcap_{i=1}^t N_i = 1$. Класс $\mathfrak{X}$ называется R_0-замкнутым, если $\mathrm{R}_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [7].

Л е м м а 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – R_0-замкнутый класс, содержащий единичную группу. Тогда для любой группы G множество $\mathfrak{I}=\{N \triangleleft G \mid G/N \in \mathfrak{X}\}$, частично упорядоченное по включению, не пусто и имеет единственный минимальный элемент $\bigcap\{N \mid N\in\mathfrak{I}\}$, который обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$ и называется $\mathfrak{X}$-корадикалом группы G.*

В дальнейшем через $\boldsymbol{P}$ будем обозначать класс всех примитивных групп. Напомним, что группа называется примитивной, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Эта максимальная подгруппа называется примитиватором группы.

В [8] показано, что если G – примитивная группа и M – ее примитиватор, то выполняется одно из следующих условий:

1) G обладает единственной минимальной нормальной абелевой подгруппой N, которая дополняется подгруппой M;

2) G обладает единственной минимальной нормальной неабелевой подгруппой N;

3) G обладает двумя минимальными нормальными подгруппами N_1 и N_2, которые неабелевы и дополняются примитиватором M.

Следуя [7] через $\boldsymbol{P}_i$ обозначим класс всех примитивных групп, удовлетворяющих i-му условию ($i = 1, 2$ или 3). Понятно, что $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\bigcup\boldsymbol{P}_2\bigcup\boldsymbol{P}_3$.

Очевидно, что если M – максимальная подгруппа группы G, то $G/\mathrm{Core}_G(M)$ – примитивная группа. Верно и обратное: если $K \triangleleft G$ и G/K – примитивная группа, то группа G обладает такой максимальной подгруппой M, что $K = \mathrm{Core}_G(M)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый (в том числе и пустой) подкласс класса $\boldsymbol{P}$. Такой подкласс будем называть примитивным классом. Через $\boldsymbol{P}(G)$ обозначим класс всех групп, изоморфных примитивным факторгруппам группы G (если $G = 1$, то полагаем $\boldsymbol{P}(G) = \varnothing$).

Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$ обозначим класс $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X}) \cup (1)$. Как следует из леммы II, 1.6 [7], для любого класса групп $\mathfrak{X}$ класс $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$ является R_0-замкнутым и содержит единичную группу. Поэтому на основании леммы 2 каждая группа обладает $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$-корадикалом.

Л е м м а 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс. Тогда для любой группы G справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *если $\boldsymbol{P}(G) \cap \mathfrak{X} = \varnothing$, то* $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$*-корадикал группы G совпадает с G;*

2) *если $\boldsymbol{P}(G) \cap \mathfrak{X} \neq \varnothing$, то* $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$*-корадикал группы G совпадает с пересечением ядер всех тех максимальных подгрупп M группы G, для которых факторгруппа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ принадлежит $\mathfrak{X}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\boldsymbol{P}(G) \cap \mathfrak{X} = \varnothing$, то в G нет факторгрупп, принадлежащих $\mathfrak{X}$. Поэтому ввиду леммы 2 $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$-корадикал группы G совпадает с G.

Пусть теперь $\boldsymbol{P}(G) \cap \mathfrak{X} \neq \varnothing$. Тогда в G найдется по крайней мере одна факторгруппа G/N, принадлежащая $\mathfrak{X}$, а вместе с ней – максимальная подгруппа M, для которой $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$ и $N = \mathrm{Core}_G(M)$. Обозначим пересечением ядер всех тех максимальных подгрупп M группы G, для которых факторгруппа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ принадлежит $\mathfrak{X}$, через R. Ввиду леммы 2 $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$-корадикал группы G содержится в R.

Предположим, что $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$-корадикал группы G строго содержится в R.

Тогда на основании леммы 2 в G найдется не содержащая R нормальная подгруппа N, для которой $G/N \in \mathfrak{X}$. Так как G/N – примитивная группа, то в G/N найдется максимальная подгруппа S/N, для которой $\mathrm{Core}_{G/N}(S/N) = 1$. Отсюда следует, что S – максимальная подгруппа G, $\mathrm{Core}_G(S) = N$ и $G/\mathrm{Core}_G(S) \in \mathfrak{X}$. Значит, $R \subseteq \mathrm{Core}_G(S) = N$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Если θ – ненулевой регулярный m-функтор, то через $\boldsymbol{P}(\theta)$ обозначим класс всех тех примитивных групп A, у которых по крайней мере один примитиватор принадлежит $\theta(A)$.

З а м е ч а н и е. Пример простой неабелевой группы A показывает, что некоторые примитиваторы из A могут принадлежать $\theta(A)$, а некоторые могут не входить в $\theta(A)$.

Доказательство следующей леммы вытекает из регулярности подгруппового m-функтора θ.

Л е м м а 4. *Для любого регулярного подгруппового m-функтора θ и любой группы G справедливо равенство $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$. В частности, $\Phi(G/\Phi_\theta(G)) = 1$.*

Т е о р е м а 1. *Пусть θ – регулярный подгрупповой m-функтор. Если G – группа и $\mathfrak{X} = \boldsymbol{P}(\theta) \cap \boldsymbol{P}(G)$, то* $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$*-корадикал группы G совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{I} = \{N \triangleleft G \mid G/N \in \mathfrak{X}\} = \varnothing$. Это значит, что группа G не имеет факторгрупп, принадлежащих $\mathfrak{X}$, а поэтому $\theta(G) = \{G\}$. Следовательно, $\Phi_\theta(G) = G$ – $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X},1)$-корадикал группы G.

Пусть теперь $\mathfrak{I} \neq \varnothing$. Тогда для любой подгруппы $N \in \mathfrak{I}$ найдется примитиватор M/N группы G/N, принадлежащий $\theta(G/N)$. Ввиду регулярности m-функтора θ имеем, что $M \in \theta(G)$. Кроме того, из $\mathrm{Core}_{G/N}(M/N) = 1$ следует, что $\mathrm{Core}_G(M) = N$. Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что $\Phi_\theta(G) \subseteq \bigcap\{N \mid N \in \mathfrak{J}\}$, т. е. подгруппа $\Phi_\theta(G)$ содержится в $R_0(\mathfrak{X},1)$-корадикале группы G.

Предположим, что $\Phi_\theta(G)$ – собственная подгруппа $R_0(\mathfrak{X},1)$-корадикала R группы G. Пусть $L/\Phi_\theta(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$, содержащаяся в $R/\Phi_\theta(G)$. Ввиду леммы 4 $\Phi(G/\Phi_\theta(G)) = 1$. Поэтому найдется максимальная подгруппа $M/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, которая не содержит $L/\Phi_\theta(G)$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $M \in \theta(G)$. Тогда ввиду регулярности подгруппового m-функтора θ имеем $M/\mathrm{Core}_G(M) \in \theta(G/\mathrm{Core}_G(M))$. Кроме того, $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \boldsymbol{P}(\theta) \cap \boldsymbol{P}(G)$. Значит, $L \subseteq R \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$. Однако, это невозможно, так как M не покрывает главный фактор $L/\Phi_\theta(G)$. Пришли к противоречию.

2. Пусть все максимальные подгруппы группы G, не покрывающие $L/\Phi_\theta(G)$, не входят в $\theta(G)$. Но тогда ввиду регулярности m-функтора θ все максимальные подгруппы группы $G/\Phi_\theta(G)$, принадлежащие $\theta(G/\Phi_\theta(G))$, содержат $L/\Phi_\theta(G)$. Отсюда имеем $L/\Phi_\theta(G) \subseteq \Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G))$. Однако это невозможно, так как ввиду леммы 4 выполняется равенство $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$. Снова пришли к противоречию.

Следовательно, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является $R_0(\mathfrak{X},1)$-корадикалом группы G. Теорема доказана.

В дальнейшем для группы G и регулярного подгруппового m-функтора θ класс $\boldsymbol{P}(\theta) \cap \boldsymbol{P}(G)$ обозначим через $\boldsymbol{P}(G,\theta)$, а через $\boldsymbol{P}_{max}(G,\theta)$ обозначим примитивный класс, содержащий все группы из $\boldsymbol{P}(G,\theta)$, а также те примитивные группы H из $\boldsymbol{P}(G)$, которые обладают следующими свойствами:

1) все примитиваторы группы H не принадлежат $\theta(H)$;

2) всегда из максимальности подгруппы M в группе G и условия $G/\mathrm{Core}_G(M) \cong H$ следует включение $\Phi_\theta(G) \subseteq M$.

Л е м м а 5. *Пусть θ – регулярный подгрупповой m-функтор. Тогда для любой группы G и любого примитивного класса $\mathfrak{X}$, удовлетворяющего условию $\boldsymbol{P}(G,\theta) \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \boldsymbol{P}_{max}(G,\theta)$, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ является $R_0(\mathfrak{X},1)$-корадикалом группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 3 имеем, что $R_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta), 1)$-корадикал группы G совпадает с пересечением ядер всех тех максимальных подгрупп M группы G, для которых факторгруппа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ принадлежит $\boldsymbol{P}_{max}(G,\theta)$. Из определения класса $\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)$ следует, что из максимальности подгруппы M в группе G и условия $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta) \backslash \boldsymbol{P}(G,\theta)$ вытекает включение $\Phi_\theta(G) \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$. Поэтому на основании теоремы 1 $R_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta), 1)$-корадикал группы G совпадает с $R_0(\boldsymbol{P}(G,\theta),1)$-корадикалом группы G, а значит, совпадает с подгруппой $\Phi_\theta(G)$. Отсюда ввиду леммы 3 окончательно имеем, что подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с $R_0(\boldsymbol{P}(\mathfrak{X},1)$-корадикалом группы G. Лемма доказана.

На основании лемм 1 и 3 для любых m-функторов θ и τ из M_{reg} и любой группы G подгруппа $\Phi_\theta(G) \cap \Phi_\tau(G)$ совпадает с $R_0(\boldsymbol{P}(G,\theta) \cup \boldsymbol{P}(G,\tau),1)$-корадикалом группы G.

Пример нециклической группы G порядка 6 показывает, что подгруппа $\Phi_\theta(G) \vee_\Phi \Phi_\tau(G)$ может не совпадать с $R_0(\boldsymbol{P}(G,\theta) \cap \boldsymbol{P}(G,\tau),1)$-корадикалом группы G.

В то же время имеет место следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть θ и τ – регулярные подгрупповые m-функторы. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *подгруппа* $\Phi_\theta(G)\cap\Phi_\tau(G)$ *совпадает с* $\mathrm{R}_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cup\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau),1)$*-корадикалом группы* G;

2) *подгруппа* $\Phi_\theta(G)\vee_\Phi\Phi_\tau(G)$ *совпадает с* $\mathrm{R}_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cap\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau),1)$*-корадикалом группы* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Простая проверка показывает, что

$$\boldsymbol{P}(G,\theta\cup\tau)=\boldsymbol{P}(G,\theta)\cup\boldsymbol{P}(G,\tau)\subseteq\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cup\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau)\subseteq\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta\cup\tau).$$

Отсюда ввиду леммы 5 подгруппа $\Phi_\theta(G)\cap\Phi_\tau(G)$ совпадает с $\mathrm{R}_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cup\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau),1)$-корадикалом группы G.

Из определения решетки Φit(G) следует, что найдется такой регулярный подгрупповой m-функтор υ, что $\Phi_\upsilon(G)=\Phi_\theta(G)\vee_\Phi\Phi_\tau(G)$. В частности, υ равен пересечению всех таких ω из M_{reg}, для которых $\Phi_\theta(G)\cdot\Phi_\tau(G)\subseteq\Phi_\omega(G)$. Поэтому

$$\boldsymbol{P}(G,\upsilon)\subseteq\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cup\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau)\subseteq\boldsymbol{P}_{\max}(G,\upsilon).$$

Снова применяя лемму 5, получаем, что подгруппа $\Phi_\theta(G)\vee_\Phi\Phi_\tau(G)$ совпадает с $\mathrm{R}_0(\boldsymbol{P}_{\max}(G,\theta)\cap\boldsymbol{P}_{\max}(G,\tau),1)$-корадикалом группы G. Теорема доказана.

Свойства решетки Φit(*G*). Существует группа G, для которой решетка Φit(G) не является модулярной. На это указывает, в частности, следующий

П р и м е р. Пусть G_1 и G_2 – нециклические группы соответственно порядка 10 и 6. И пусть $G=G_1\times G_2$. Если θ – регулярный подгрупповой m-функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, не делящегося на 5, то $\Phi_\theta(G)$ – силовская 5-подгруппа группы G. Если τ – регулярный подгрупповой m-функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, делящегося на 3, то $\Phi_\tau(G)=G_1$. Если ω – регулярный подгрупповой m-функтор, выделяющий в G все ее максимальные подгруппы индекса, делящегося на 5, то $\Phi_\omega(G)=G_2$. Теперь

$$\Phi_\tau(G)\cap(\Phi_\theta(G)\vee_\Phi\Phi_\omega(G))=G_1\cap G=G_1\neq\Phi_\theta(G)=\Phi_\theta(G)\vee_\Phi 1=\Phi_\theta(G)\vee_\Phi(\Phi_\tau(G)\cap\Phi_\omega(G)).$$

Таким образом, решетка Φit(G) не является модулярной, а значит, не является дистрибутивной.

Далее запись $(H_1,\ldots,H_n)$ используется для обозначения класса групп, порожденного группами $H_1,\ldots,H_n$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $H_1,\ldots,H_n$ *– максимальная система попарно неизоморфных примитивных групп из* $\boldsymbol{P}(G)$. *Если* X *– множество, состоящее из группы* G *и всех* $\mathfrak{X}_i$*-корадикалов группы* G, *где* $\mathfrak{X}_i=(H_i)$, $i=1,\ldots,n$, *то*:

1) *для любого элемента решетки* Φit(G) *существует* $\bigcap$*-представление с помощью элементов множества* X;

2) $|\,\Phi\mathrm{it}(G)\,|\le 2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta\in M_{\mathrm{reg}}$. Если $\boldsymbol{P}(G,\theta)=\varnothing$, то ввиду теоремы 1 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с $\mathrm{R}_0(\varnothing,1)$-корадикалом группы G, равным G.

Значит, $\mathfrak{X}=\boldsymbol{P}(G,\theta)\neq\varnothing$. Отметим, что $\boldsymbol{P}(G)=(H_1,\ldots,H_n)$. Поэтому найдутся группы $H_{i1},\ldots,H_{ik}\ (k\ge 1)$ такие, что $\mathfrak{X}=(H_{i1},\ldots,H_{ik})$.

Пусть $\mathfrak{X}_j=(H_{i_j})$, $j=1,\ldots,k$. И пусть θ_j – такой регулярный подгрупповой m-функтор, что $\boldsymbol{P}(\theta_j)=(H_{i_j})$ и $\theta_j(H_{i_j})$ – множество всех примитиваторов группы H_{i_j}, принадлежащих $\theta(H_{i_j})$. Тогда ввиду леммы 1 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с пересечением θ_j-подгрупп

Фраттини группы G для всех $j=1,...,k$. На основании леммы 3 подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с пересечением всех $R_0(\mathfrak{X}_j,1)$-корадикалов группы G, $j=1,...,k$. Утверждение 1) доказано.

Из утверждения 1) следует, что число элементов решетки Φit(G) не превосходит числа всех подмножеств множества $\{H_1,...,H_n\}$. Поэтому $|\Phi\mathrm{it}(G)|\le 2^n$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть A – неабелева простая группа. И пусть $G=A_1\times A_2$, где $A\cong A_1\cong A_2$. Так как G – примитивная группа из $\boldsymbol{P}_3$, то $\{G,A\}$ – максимальная система попарно неизоморфных групп из $\boldsymbol{P}(G,\theta)$. Очевидно, $\Phi\mathrm{it}(G)=\{1,G\}$. Кроме того, $R_0((G),1)$-корадикал и $R_0((A),1)$-корадикал группы G единичны.

Таким образом, во множестве X из теоремы 3 некоторые из $R_0(\mathfrak{X}_j,1)$-корадикалов группы G могут быть равными.

В связи с теоремой 3 отметим следующие вопросы.

1. *Описать строение группы G, если решетка* Φit(G) *является модулярной* (*дистрибутивной*).

2. *Описать строение группы G, если решетка* Φit(G) *является решеткой с дополнением*.

3. *Пусть* $H_1,..., H_n$ *– максимальная система попарно неизоморфных примитивных групп из* $\boldsymbol{P}(G)$. *Описать строение группы G, если решетка* Φit(G) *содержит ровно* 2^n *элементов.*

Литература

1. Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
2. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
3. D e s k i n s W. E. // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, N 2. P. 306–313.
4. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
5. К а м о р н и к о в С. Ф., С е л ь к и н М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
6. К а м о р н и к о в С. Ф. // Классы групп, алгебр и их приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова. Гомель, 2007. С. 81–82.
7. D o e r k K., H a w k e s T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
8. B a e r R. // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 115–187.

S. F. KAMORNIKOV

LATTICE OF FRATTINI-TYPE SUBGROUPS

Summary

In the article some properties of the lattice of Frattini-type subgroups of a finite group are investigated.