ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ФОРМАЦИИ

А.Ф. Васильев[1], **Т.И. Васильева**[2]

[1]Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь, formation56@mail.ru
[2]Белорусский государственный университет транспорта,
Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь, tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые ниже группы являются конечными. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация, т. е. замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений класс групп. Х. Фиттинг [1] в 1938 году доказал, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда ее можно представить произведением двух своих нильпотентных подгрупп. Этот результат стал отправной точкой следующей задачи: для формации $\mathfrak{F}$ установить условия, при которых группа $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, принадлежит $\mathfrak{F}$. Р. Брайс и Дж. Косси [2] решили эту задачу для случая нормальных (субнормальных) A и B. Б. Амберг, Л. С. Казарин и Б. Хефлинг [3] рассмотрели случай произвольных A и B; А. Ф. Васильев [4, 5] в классе разрешимых групп получил конструктивное решение задачи для случая абнормальных (контранормальных, т.е. $A^G = B^G = G$) A и B. Отметим еще работы [6–8] в этом направлении.

В настоящем сообщении рассматривается еще один случай отмеченной выше задачи. Напомним [9], что группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B, то группа $G = AB$ называется *произведением тотально перестановочных подгрупп* A и B. Рассматриваемая нами задача для тотально перестановочных подгрупп была полностью решена в [10, 11].

В работе [12] было введено

Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Пустой класс считается MP-замкнутым в любом классе $\mathfrak{X}$.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, класс $\mathfrak{F}$ называется MP-замкнутым. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ называется разрешимым MP-замкнутым классом.

Примерами MP-замкнутых формаций являются формации всех π-групп, формации всех разрешимых π-групп, формации всех дисперсивных по Оре групп (см. [9, с. 156, 162]), другие примеры найдены в [12]. В этой работе была поставлена следующая естественная

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ – класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.*

Мы рассматриваем случай насыщенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Многие классические формации являются насыщенными. В силу теоремы Гашюца-Любезедер-Шмида всякая непустая насыщенная формация является локальной тогда и только тогда, когда она насыщенна. Все необходимые обозначения и результаты можно найти в [13, гл. IV].

Получена следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π-группы, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.*

1. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ имеют полные локальные задания x и f, причем $f(p) \subseteq x(p)$ и $f(p)$ является MP-замкнутой формацией в $x(p)$ для любого простого p, то $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой формацией в $\mathfrak{X}$.*

2. *Пусть X и F – максимальные внутренние задания соответственно $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ является MP-замкнутой в $X(p)$ для любого простого p.*

В случае, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп, из теоремы 1 получается теорема 2 из [12].

Предложение. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{G}_\tau$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является MP-замкнутой формацией, когда для каждого* $p \in \pi \setminus \tau$ *выполняется следующее:* p *не делит* $q-1$ *для любого* $q \in \tau \setminus \pi$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. На множестве $A = \{\pi_i | \pi_i \subseteq \pi$ и $\pi = \bigcup \pi_i$ для всех $i \in I\}$ зададим следующее бинарное отношение $\Delta = \{(\pi_i, \pi_j)|$ для каждого $p \in \pi_i \setminus \pi_j$ следует, что p не делит $q-1$ для любого $q \in \pi_j \setminus \pi_i\}$.

Теорема 2. *Формация* $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{G}_{\pi_i}\mathfrak{G}_{\pi_j}$, *где каждая пара* $(\pi_i, \pi_j) \in \Delta$, *является MP-замкнутой формацией.*

Напомним [14], что *формацией с условием Шеметкова* называется формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Теорема 3. *Наследственная насыщенная формация* $\mathfrak{F}$ *с условием Шеметкова является MP-замкнутой формацией тогда и только тогда, когда она содержит все сверхразрешимые* $\pi(\mathfrak{F})$*-группы.*

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Литература

1. Fitting H. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Vol. 48. P. 77–141.

2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups*, Math. Z. 1972. Vol. 127, No 3. P. 217–233.

3. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями* // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.

4. Васильев А. Ф. *Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах* // Украинск. матем. журн. 2002. Т. 54, № 9. С. 1163–1171.

5. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. Vol. 85, No 1. P. 305–311.

6. Семенчук В. Н. *Разрешимые* $\mathfrak{F}$*-радикальные формации* // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.

7. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N. *On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups* // J. Algebra. 2014. V. 403, P. 69–76.

8. Gállego M. P., Hauck P., Pérez-Ramos M. D. *Saturated formations and products of connected subgroups*. J. Algebra. 2011. Vol. 333, No 1. P. 105–119.

9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups*. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.

10. Maier R. *A completeness property of certain formations* // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 540–544.

11. Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D. *A question of R. Maier concerning formations* // J. Algebra. 1996. Vol. 182. P. 738–747.

12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. *О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп* // Известия вузов. Математика. 2017. Т. 61, № 6. С. 9–17.

13. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

14. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer, 2006.

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПРИВОДИМЫМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Д.В. Васильев[1], **В.О. Иванова**[2], **Н.И. Калоша**[1], **Е.В. Сурай**[1]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vasilyev@im.bas-net.by, kalosha@im.bas-net.by, suraylena@mail.ru
[2]ГУО Минский городской педагогический колледж, Макаенка 29, 220114 Минск, Беларусь
someone_vnv@mail.ru

В середине прошлого века одной из самых популярных задач в области диофантовых приближений была проблема К. Малера. Рассмотрим неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-w}, \quad w > 0 \tag{1}$$