С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О σ-субнормальных подгруппах конечных групп, *Сиб. матем. журн.*, 2020, том 61, номер 2, 337–343

DOI: 10.33048/smzh.2020.61.209

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2020. Том 61, № 2

УДК 512.542

О σ–СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Для простого числа p и разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел доказывается следующая гипотеза А. Н. Скибы: если каждое полное холлово множество типа σ конечной группы G редуцируется в некоторую подгруппу H из G, то подгруппа H σ-субнормальна в G.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.209

Ключевые слова: конечная группа, σ-субнормальная подгруппа, холлова подгруппа, полное холлово множество.

1. Введение

Отвечая на вопрос Кегеля [1] и Виландта [2], Кляйдман в [3] доказал, что подгруппа H конечной группы G субнормальна в G, если $H \cap P$ — силовская p-подгруппа из H для любой силовской p-подгруппы P группы G и любого простого числа p.

Отмеченный результат инициировал соответствующий вопрос для σ-субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А. Н. Скибой в [4] под номером 19.86 (см. также вопрос 7.2 из [5]).

Проблема 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и G — конечная группа, обладающая холловой σ_i-подгруппой для каждого $i \in I$. Пусть H — подгруппа группы G такая, что $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i \in I$ и всякой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G. Верно ли, что H является σ-субнормальной подгруппой в G?*

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы из [6], предложена А. Н. Скибой в [7]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G. Далее всегда σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Следуя [8], будем говорить, что группа G *σ-примарна*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Исследования С. Ф. Каморникова выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант ГР № 20191056).

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп
$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$
такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ σ-примарна. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Следующая проблема 2 является более общей по сравнению с проблемой 1. Это связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп.

Следуя [8], будем говорить, что система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G является *полным холловым множеством типа* σ группы G, если выполняются следующие условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \left\{S_1^g, S_2^g, \dots, S_k^g\right\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$. Группа G называется *σ-полной*, если она обладает по крайней мере одним полным холловым множеством типа σ (понятно, что для некоторых разбиений σ существуют группы, для которых множество всех полных холловых множеств типа σ пустое).

Будем говорить, что полное холлово множество Σ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \dots, k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, \dots, k$).

Проблема 2. *Пусть σ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ конечной группы G. Пусть H — подгруппа из G такая, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что H является σ-субнормальной подгруппой в G?*

Если в проблеме 1 требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G, то в проблеме 2 речь идет только о полных холловых множествах Σ^g $(g \in G)$ для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G. Поэтому положительное решение проблемы 2 всегда приводит к решению проблемы 1.

В данной работе проблемы 1 и 2 решаются для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, где p — простое число. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть p — простое число, $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ и Σ — полное холлово множество типа σ конечной группы G. Если H — подгруппа из G такая, что Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$, то H σ-субнормальна в G.*

Ключом к доказательству теоремы 1.1 являются лемма 2.4, устанавливающая строение минимального контрпримера к проблеме 2 для любого разбиения σ, а также теорема Л. С. Казарина [9], описывающая простые неабелевы группы, которые содержат холлову p'-подгруппу.

2. Определения и предварительные результаты

В данной работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [10]. Что касается терминологии теории σ-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к [7, 8].

Будем использовать следующие обозначения:

— если π — некоторое множество простых чисел, то $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ — множество всех холловых π-подгрупп группы G;

— если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G и N — нормальная подгруппа группы G, то $\Sigma N/N = \{S_1N/N, S_2N/N, \ldots, S_kN/N\}$;

— если n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

— $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Основные свойства σ-субнормальных подгрупп приведем в виде лемм, доказательство которых осуществляется простой проверкой.

Лемма 2.1. *Пусть H и N — подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда*

(1) *если подгруппа H σ-субнормальна в G, то подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N;*

(2) *если $N \subseteq H$, то подгруппа H σ-субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N σ-субнормальна в G/N.*

Лемма 2.2. *Пусть H и K — подгруппы группы G, причем подгруппа H σ-субнормальна в G. Тогда*

(1) *если $K \subseteq H$ и подгруппа K σ-субнормальна в H, то K σ-субнормальна в G;*

(2) *подгруппа $K \cap H$ σ-субнормальна в K;*

(3) *если $H \subseteq K$, то H σ-субнормальна в K.*

Следуя [8], будем говорить, что группа G *σ-нильпотентна* (или *σ-разложима*), если G является прямым произведением некоторых σ-примарных групп, т. е. группа G представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i-подгрупп для некоторых $i \in I$.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является наследственной формацией Фиттинга. Отсюда, в частности, следует, что в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой σ-нильпотентна. Эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и называется *σ-нильпотентным корадикалом* (или *$\mathfrak{N}_\sigma$-корадикалом*) группы G.

Лемма 2.3. *Подгруппа H σ-субнормальна в G, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(1) *группа G σ-нильпотентна;*

(2) *$G^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq H$;*

(3) *$|\sigma(G)| = 1$.*

Пусть H — подгруппа σ-полной группы G, $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G. Будем говорить, что пара (G, H) является *контрпримером к проблеме* 2, если для любого $g \in G$ полное холлово множество Σ^g редуцируется в H, но подгруппа H не σ-субнормальна в G. Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к проблеме* 2.

Лемма 2.4. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Если (G, H) — минимальный контрпример к проблеме 2, то G и H — простые неабелевы группы.*

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G.

Ввиду леммы 2.3 $k = |\sigma(G)| \geq 2$. По условию леммы $H \cap S_i^g$ является холловой σ_i-подгруппой в H для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Так как $N \trianglelefteq G$, то $N \cap S_i^g \trianglelefteq S_i^g$ и $N \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа в N. Отсюда легко заключить, что $S_i^g \cap HN$ — холлова σ_i-подгруппа в HN. Теперь из равенства

$$S_i^g N/N \cap HN/N = \big(S_i^g \cap HN\big)N/N$$

следует, что $S_i^g N/N \cap HN/N$ — холлова σ_i-подгруппа в HN/N. Таким образом, полное холлово множество $\Sigma^g N/N$ типа σ группы G/N редуцируется в HN/N для любого элемента $g \in G$. Отсюда в силу минимальности контрпримера подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N. Но тогда ввиду леммы 2.1 HN является σ-субнормальной подгруппой группы G. Поэтому N не содержится в H, в частности, $\mathrm{Core}_G(H) = 1$. Ясно, что $H \cap S_i^x$ — холлова σ_i-подгруппа в H для всех $x \in HN$ и система $\big\{HN \cap S_1^x, HN \cap S_2^x, \dots, HN \cap S_k^x\big\}$ является полным холловым множеством типа σ группы HN, которое редуцируется в H. Если $|HN| < |G|$, то в силу минимальности контрпримера подгруппа H σ-субнормальна в HN. Тогда ввиду леммы 2.2 H является σ-субнормальной подгруппой группы G, что противоречит допущению.

Таким образом, полагаем далее, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p. Отсюда и из $k \geq 2$ следует, что найдется множество $\sigma_i \in \sigma$, для которого $\sigma_i \cap \pi(G) \in \sigma(G)$ и $p \notin \sigma_i$. Тогда H содержит всякую холлову σ_i-подгруппу S_i^g для всякого $g \in G$, причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\big\langle S_i^g \mid g \in G\big\rangle \subseteq H$. Так как $1 \neq \big\langle S_i^g \mid g \in G\big\rangle \trianglelefteq G$, то $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Последнее невозможно.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Очевидно, $K \trianglelefteq H$. Поэтому полное холлово множество Σ^g типа σ группы G редуцируется в K для любого элемента $g \in G$. Таким образом, пара (G, K) удовлетворяет условию леммы. Если $K = H$, то $G = N$ — простая неабелева группа. Значит, $K \neq H$. Поэтому в силу минимальности контрпримера подгруппа K σ-субнормальна в G. Но тогда ввиду леммы 2.2 подгруппа K σ-субнормальна в N. Значит, существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = N$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i, либо группа $K_i / \mathrm{Core}_{K_i}(K_{i-1})$ σ-примарна.

Предположим, что $K \neq 1$, и рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Пусть N является простой неабелевой группой. Тогда подгруппа K_{n-1} не нормальна в N. Значит, $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = N/1 = N$ — σ_i-группа для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$. Так как $G = HN$ и $k \geq 2$, то для всех $g \in G$ подгруппа H содержит все холловы σ_j-подгруппы S_j^g $(j \neq i)$. Следовательно, $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Случай 2. Пусть $N = N_1 \times N_2$, где N_1 и N_2 — изоморфные простые группы. Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в N, то $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1})$ — σ_i-группа для некоторого $i = 1, 2, \dots, k$. Очевидно, что либо $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = 1$, либо $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \in \{N_1, N_2\}$. Если $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = 1$, то $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) = N$ — σ_i-группа. Если $\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \in \{N_1, N_2\}$, то ввиду изоморфизма $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1}) \simeq N_1$ подгруппа N_1 является σ_i-группой, откуда следует, что и N является σ_i-группой. Далее, как и в случае, когда N — простая неабелева группа, приходим к противоречию с тем, что $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$.

Если подгруппа K_{n-1} нормальна в N, то $K_{n-1} \in \{N_1, N_2\}$, т. е. K_{n-1} — простая неабелева группа. Если $K \subset K_{n-1}$, то, как и в случае 1, приходим к противоречию. Следовательно, $K_{n-1} = K$. Тогда $K = H \cap N \trianglelefteq N$ и $K = H \cap N \trianglelefteq H$. Поэтому $K \trianglelefteq \langle N, H\rangle = HN = G$. Отсюда и из $K \subseteq H$ имеем $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Случай 3. Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где $t \geq 3$ и $N_1, N_2, \dots, N_t$ — изоморфные простые группы. Используя индукцию по t, как и в случаях 1 и 2, приходим к тому, что либо N — σ-примарная группа, либо $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Это противоречит доказанному ранее.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$, а значит, $G = N \rtimes H$ — полупрямое произведение подгрупп N и H. Если $S_i \in \Sigma$, то $S_i = \widetilde{N} \rtimes \widetilde{H}$, где $\widetilde{N} \in \mathrm{Hall}_{\sigma_i}(N)$, $\widetilde{H} \in \mathrm{Hall}_{\sigma_i}(H)$. Рассмотрим группу $N \rtimes \widetilde{H}$, содержащую S_i. По условию леммы для всех $x \in N\widetilde{H}$ пересечения $H \cap S_i^x$ являются холловыми σ_i-подгруппами в H. Отсюда $S_i^x \cap H \subseteq N\widetilde{H} \cap H = (N \cap H)\widetilde{H} = \widetilde{H}$. Следовательно, $S_i^x \cap H = \widetilde{H}$, откуда получим, что $\widetilde{H} \subseteq S_i^x$ для всех $x \in N\widetilde{H}$. Значит, $\widetilde{H} \subseteq O_{\sigma_i}(N\widetilde{H})$. Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i-группой. Последнее, как показывалось выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и холлова σ_i-подгруппа $\widetilde{H}$ группы H централизует N. Так как это верно для всякого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $G = N \times H$ и $H \trianglelefteq G$, что невозможно. Таким образом, G является простой неабелевой группой.

Покажем, что подгруппа H простая. Предположим, что она содержит собственную нормальную подгруппу $L \neq 1$. Очевидно, что пара (G, L) удовлетворяет условию леммы. Так как $|G| + |L| < |G| + |H|$, подгруппа L σ-субнормальна в G. Это означает, что существует цепь подгрупп

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа L_{i-1} нормальна в L_i, либо группа $L_i / \mathrm{Core}_{L_i}(L_{i-1})$ σ-примарна. Отсюда и из простоты группы G следует, что G является σ_i-группой для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$. Так как $k \geq 2$, это невозможно. Следовательно, H — простая неабелева группа. Лемма доказана.

Замечание. Как следует из [3], структура минимального контрпримера к гипотезе Кегеля — Виландта такая же, как в лемме 2.4, т. е. G и H являются простыми неабелевыми группами.

Следствием простоты группы G из минимального контрпримера к проблеме 2 является

Лемма 2.5. *Пусть (G, H) — минимальный контрпример к проблеме 2 и $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$. Тогда $\pi(H) \nsubseteq \sigma_i$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Дополнительную информацию о строении минимального контрпримера к проблеме 2 дает следующее предложение, имеющее самостоятельное значение. Отметим только, что если H — подгруппа группы G и p — простое число, то согласно [12] запись $H \leq_p G$ обозначает тот факт, что подгруппа H p-субнормальна в G, т. е. для любой силовской p-подгруппы P группы G пересечение $P \cap H$ является силовской p-подгруппой в H.

Предложение 2.6. *Для любого разложения σ группа G из минимального контрпримера (G, H) к проблеме 2 не может быть знакопеременной группой.*

Доказательство. Предположим, что $G \simeq A_n$, $n \geq 5$. Так как H — простая неабелева группа, то $n \geq 6$. Ввиду [11] группа G является σ-полной для отличного от минимального разложения σ в том и только в том случае, когда либо $n = p$ — простое число, либо $n = 8$.

Пусть $n = 8$. Тогда G имеет холлову $\{2, 3\}$-подгруппу и является σ-полной только для тех отличных от минимального разложений σ, для которых $\sigma(G) = \{\{2, 3\}, \{5\}, \{7\}\}$. Так как H является простой неабелевой группой, то $\pi(H)$ содержит хотя бы одно из чисел 5 или 7. Пусть $5 \in \pi(H)$. Тогда $H \leq_5 G$ и по теореме 1.4 из [12] $n = s \cdot 5^a > 5$, где $1 \leq s < 5$. Поскольку $n = 8$, это невозможно. Аналогично показывается, что случай, когда $7 \in \pi(H)$, также невозможен.

Пусть $n = 7$. Тогда G является σ-полной только для тех отличных от минимального разложений σ, для которых либо $\sigma(G) = \{\{2, 3\}, \{5\}, \{7\}\}$, либо $\sigma(G) = \{\{2, 3, 5\}, \{7\}\}$. Первый случай исключается, как и при $n = 8$. Во втором случае ввиду леммы 2.5 имеем $7 \in \pi(H)$ и $H \leq_7 G$. Тогда по теореме 1.4 из [12] $7 = s \cdot 5^a > 7$, где $1 \leq s < 7$, что невозможно.

Если $n = p \geq 11$, то G является σ-полной только для тех отличных от минимального разложений σ, для которых $\sigma(G) = \{\pi((p-1)!), \{p\}\}$. Очевидно, $p \in \pi(H)$ и $H \leq_p G$. По теореме 1.4 из [12] $p = s \cdot p^a > p$, где $1 \leq s < p$, что невозможно. Предложение доказано.

Понадобится также следующий теоретико-числовой результат из [13], устанавливающий, что если a и b — натуральные числа такие, что $a \geq 2$, $b \geq 3$ и $(a, b) \neq (2, 6)$, то найдется простое число r, которое делит $a^b - 1$, но не делит $a^l - 1$ для всех $l = 1, 2, \dots, b-1$. Такое число r называется *примитивным* по отношению к паре (a, b).

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть (G, H) — минимальный контрпример. Тогда ввиду леммы 2.4 G и H — простые неабелевы группы. Так как группа G σ-полная, она обладает холловой p'-подгруппой M. Ввиду теоремы 7 из [9] возможен один из следующих случаев:

(a) $G = A_p$ и $M \simeq A_{p-1}$;

(b) $G = PSL_n(q)$, где $q = r^m$, $m \geq 1$, r — простое число и M — параболическая подгруппа в G; при этом $|G : M| = (q^n - 1)/(q - 1) = p^k$ и n — простое число;

(c) $G = PSL_2(11)$, $p = 11$ и $M \simeq A_5$;

(d) $G = M_{11}$, $p = 11$ и $M \simeq M_{10}$;

(e) $G = M_{23}$, $p = 23$ и $M \simeq M_{22}$.

Ввиду предложения 2.6 знакопеременная группа A_p не может быть контрпримером к проблеме 2.

Рассмотрим случай (b). Пусть сначала $n \geq 3$. Если $(q, n) \neq (2, 6)$, то найдется простое число t, примитивное по отношению к паре (q, n). По теореме Ферма $t \geq n + 1$ и, следовательно, $t \geq 5$. Поскольку M — параболическая подгруппа, $(|M|, t) = 1$. Из леммы 2.5 следует, что $H \leq_t G$. Данный случай исключается теоремой 1.4 из [12]. Таким образом, $(q, n) = (2, 6)$ и $G = SL_6(2)$. Так как число 6 не является простым, группа $G = SL_6(2)$ не удовлетворяет условию (b).

Следовательно, $G = PSL_2(q)$, где $q+1 = p^k$. Ввиду леммы 1.2 из [13] могут иметь место только следующие случаи.

Пусть сначала $r = 2$. Тогда $2^m + 1 = p^k$. Возможны два случая.

(1) $k = 1$ и p — простое число Ферма, где m — степень числа 2. Тогда при $m = 2$ имеем $G = PSL_2(2^2) \simeq A_5$. Данный случай был рассмотрен выше. При

$m = 2^2 = 4$ получаем $p = 17$. По лемме 2.5 $H \leq_t G$, где $t \geq 17$. Этот случай невозможен, так как исключается теоремой 1.4 из [12].

(2) $m = 3$, $p = 3$, $k = 2$ и $G = PSL_2(9)$. Так как число $9+1 = 10$ не является степенью простого числа, этот случай также невозможен.

Таким образом, r — нечетное простое число и $r^m + 1 = 2^k$. В этом случае $m = 1$ и $r = 2^k - 1$ — простое число Мерсенна. Так как $G = PSL_2(r)$, то $H \simeq A_5$ (если такая подгруппа существует). Поскольку $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где $\sigma_2 = \{2\}$, то A_5 содержит подгруппу порядка 15, что невозможно.

Анализ случаев (c), (d) и (e) показывает, что ввиду леммы 2.5 и теоремы 1.4 из [12] они невозможны. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.

2. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Pure Math. 1980. V. 37. P. 161–173.

3. *Kleidman P. B.* A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. V. 133, N 2. P. 369–428.

4. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.

5. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. V. 4, N 3. P. 281–309.

6. *Wielandt H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 209–244.

7. *Скиба А. Н.* О σ-свойствах конечных групп. I // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4. С. 89–96.

8. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.

9. *Казарин Л. С.* О произведении конечных групп // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 528–531.

10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

11. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Hall subgroups of finite groups // Ischia Group Theory 2004: Proc. conf. in honor of Marcel Herzog (Naples, Italy, 2004). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. P. 229–265.

12. *Guralnick R., Kleidman P. B., Lyons R.* Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups // Proc. London Math. Soc. 1993. V. 66, N 3. P. 129–151.

13. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monath. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.

Поступила в редакцию 3 августа 2019 г.
После доработки 9 сентября 2019 г.
Принята к публикации 18 октября 2019 г.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Международный университет «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com