О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, СВЯЗАННЫХ С σ-ПРОБЛЕМОЙ КЕГЕЛЯ-ВИЛАНДТА

С.Ф. Каморников[1], **В.Н. Тютянов**[2],

[1]Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь, sfkamornikov@mail.ru
[2]Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»,
Октября 46а, 246029 Гомель, Беларусь, vtutanov@gmail.com

В работе рассматриваются только конечные группы.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – разбиение $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Элементы σ_i $(i \in I)$ разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется σ-*субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Далее множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$.

Группа G называется σ-*полной*, если $G \in \bigcap_{i\in I} E_{\sigma_i}$, т.е. G обладает по крайней мере одной σ_i-холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap_{i\in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить E_σ. Для $i \in I$ мы пишем $H \leqslant_{\sigma_i} G$, если подгруппа H обладает тем свойством, что $H \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из H для любой σ_i-холловой подгруппы S_i группы G.

Если подгруппа H является σ-субнормальной в σ-полной группе G, то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leqslant_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в "Коуровской тетради" [2] под номером 19.86 А.Н. Скиба сформулировал следующий аналог известной гипотезы Кегеля-Виландта.

Проблема. *Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ-субнормальной в G, если $H \leqslant_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$?*

Отмеченная проблема сегодня называется σ-*проблемой Кегеля-Виландта*. Интерес к ней обусловлен тем, что ее положительное решение дает новый критерий σ-субнормальности подгрупп, имеющих важное значение при решении целого ряда классификационных задач теории конечных групп.

В данной работе приводится редукционное решение σ-проблемы Кегеля-Виландта: показывается, что для любого разбиения σ решение σ-проблемы Кегеля-Виландта сводится к ее решению в классе всех σ-полных простых неабелевых групп.

Теорема. *Тогда и только тогда σ-проблема Кегеля-Виландта имеет положительное решение, когда она верна в классе всех σ-полных простых неабелевых групп.*

Ввиду теоремы алгоритм решения σ-проблемы Кегеля-Виландта для заданного разбиения σ состоит в выполнении следующих двух шагов:

1) классифицировать все σ-полные простые группы;

2) на основе анализа строения σ-полных простых групп либо доказать, что для всех их проблема верна, либо указать хотя бы одну из них, для которой это не так.

Что касается второго шага алгоритма, то ввиду [3–7] для любого разбиения σ достаточно ограничиться рассмотрением σ-полных простых неабелевых групп лиева типа ранга большего 1.

Ввиду требования σ-полноты группы G в σ-проблеме Кегеля-Виландта ее решение тесно связано со следующей проблемой 3.2 из [8]:

Найти холловы подгруппы конечных простых групп.

Изучением этой проблемы занимались многие математики. Полная классификация холловых подгрупп известных простых групп представлена в работе [8]. Понятно, что она не решает проблемы описания σ-полных простых групп, которая даже для конкретных разбиений σ является сложной теоретико-групповой и теоретико-числовой задачей.

Отметим, что для минимального разбиения $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{5\},...\}$ в силу теоремы Силова любая группа является σ-полной. Поэтому в этом случае σ-проблема Кегеля-Виландта превращается в известную проблему Кегеля-Виландта. Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [9].

В настоящее время, кроме минимального разбиения, σ-проблема Кегеля-Виландта решена для бинарного разбиения $\sigma = \{\pi,\pi'\}$ (см. [3,10]), а также для разбиения $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$ (см. [11]).

В работе, кроме описанного выше алгоритма решения σ-проблемы Кегеля-Виландта, обсуждаются другие подходы к ее исследованию: решеточные, арифметические, факторизационные.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Литература

1. Skiba A. N. *On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups* // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

2. *Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь.* Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018.

3. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О σ-субнормальных подгруппах конечных групп* // Сиб. матем. ж. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.

4. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О σ-субнормальных подгруппах конечных $3'$-групп* // Укр. матем. ж. 2020. Т. 72, № 6. С. 806–811.

5. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *О некоторых аспектах σ-проблемы Кегеля-Виландта* // Известия вузов. Математика. 2022. № 2. С. 18–28.

6. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *К σ-проблеме Кегеля-Виландта* // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 4. С. 564–570.

7. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *К σ-проблеме Кегеля-Виландта* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 121–129.

8. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. *Теоремы силовского типа* // УМН. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.

10. Kleidman P. B. *A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups* // Ann. Math. 1991. Vol. 133. P. 369–428.

11. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N. *On the Kegel-Wielandt σ-problem for binary partitions* // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2022. Vol. 201. P. 443–451.

12. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. *σ-Проблема Кегеля-Виландта для разбиения* $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$ // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 4. С. 64–68.

О СТРОЕНИИ МЕТРИК ЭЙНШТЕЙНА И ИНВАРИАНТНЫХ СОЛИТОНОВ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

П.Н. Клепиков, Е.Д. Родионов, О.П. Хромова

Алтайский государственный университет, пр. Ленина 61, 656049 Барнаул, Россия,

klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Введение. В работе исследованы однородные солитоны Риччи на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с полусимметрической связностью, дана их полная классификация. Ключевые слова: однородный солитион Риччи, трехмерное локально однородное пространство, полусимметрическая связность.

Солитоны Риччи являются естественным обобщением метрик Эйнштейна и представляют собой решение потока Риччи. В общем случае они исследовались многими математиками, что нашло отражение в обзорах Х.-Д.Цао, Р.М.Аройо – Р.Лафуэнте [1, 2].