КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СУБМОДУЛЯРНЫМИ *CP*-ПОДГРУППАМИ

В.С. Монахов, И.Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь,
victor.monakhov@gmail.com, irina.sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы.

Примарным элементом группы называют элемент, порядок которого есть степень некоторого простого числа. Для краткости подгруппу, порожденную примарным элементом, будем называть CP-подгруппой. Каждая неединичная группа содержит CP-подгруппы и способ их вложения во многом определяет строение всей группы. Так, группа дедекиндова (т. е. каждая подгруппа в группе нормальна) тогда и только тогда, когда каждая CP-подгруппа в группе нормальна. Группа нильпотентна в том и только в том случае, когда все CP-подгруппы субнормальны в группе. Известны также признаки сверхразрешимости группы с ограничениями на CP-подгруппы [1-4].

Хорошо известно, что множество всех подгрупп группы G, частично упорядоченное по включению, является решеткой. Такую решетку обозначают через $\mathfrak{L}(G)$. Подгруппа называется модулярной, если она является модулярным элементом решетки $\mathfrak{L}(G)$, [5]. Модулярность не обладает транзитивностью. Так, в знакопеременной группе A_4 степени 4 подгруппа порядка 2 модулярна в силовской 2-подгруппе, которая в свою очередь модулярна в группе A_4, но C_2 не модулярна в A_4. В работе [6] описано строение групп, в которых модулярность транзитивна.

Естественным расширением понятия модулярности является понятие субмодулярности: подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если в группе G существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leqslant \ldots \leqslant H_i \leqslant H_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant H_n = G$$

такая, что H_i модулярна в H_{i+1} для каждого i, [7]. Класс групп, в которых субмодулярны все CP-подгруппы, будем обозначать через $\mathfrak{C}$. Установлены следующие характеризации класса $\mathfrak{C}$.

Теорема. *Пусть G — конечная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Каждая CP-подгруппа группы G субмодулярна в G, т. е. $G \in \mathfrak{C}$.*

(2) *Каждая CP-подгруппа в $G/\Phi(G)$ субмодулярна и имеет простой порядок.*

(3) $A/\Phi(A) \in \mathfrak{U}_1$ *для каждой подгруппы A с нильпотентным коммутантом.*

(4) $B/\Phi(B) \in \mathfrak{U}_1$ *для каждой бипримарной подгруппы B с циклической силовской подгруппой.*

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, $\mathfrak{U}_1$ — класс всех сверхразрешимых групп экспоненты свободной от квадратов.

Группы с субмодулярными силовскими подгруппами исследовались в работах [7–8]. Класс таких групп будем обозначать через $\mathfrak{Z}$. Поскольку каждая субнормальная подгруппа субмодулярна, то класс $\mathfrak{C}$ является расширением класса $\mathfrak{Z}$, но не совпадает с ним. Действительно, в группе $GL(3,7)$ существует неабелева подгруппа Q порядка 3^3 и экспоненты 3, которая неприводимо действует на элементарную абелеву группу P порядка 7^3. Полупрямое произведение $G = P \rtimes Q$ является минимальной несверхразрешимой группой и $G \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{Z}$. Связь между классами $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{C}$ устанавливает

Следствие. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}_1$.

Здесь $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ — класс всех групп, силовские подгруппы в фактор-группе по подгруппе Фиттинга которых абелевы, $\mathfrak{N}\mathcal{A}_1$ — класс всех групп, силовские подгруппы в фактор-группе по подгруппе Фиттинга которых элементарны абелевы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237).

Литература

1. Monakhov V. S., Kniahina V. N. *Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups* // Ricerche Mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.

2. Монахов В. С. *Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.

3. Монахов В. С. *О трех формациях над $\mathfrak{U}$* // Матем. заметки. 2021. Т. 110, Вып. 3. С. 358–367.

4. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. *О конечных группах с $\mathbb{P}_\pi$-субнормальными подгруппами* // Матем. заметки. 2023. Т. 114, Вып. 4, С. 483–496.

5. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*. Berlin, New York: De Gruyter, 1996.

6. Liu A. M., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. *Finite groups in which modularity is a transitive relation* // Arch. Math. 2023. Vol. 121. P. 111–121.

7. Zimmermann I. *Submodular subgroups in finite groups* // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.

8. Васильев А. В. *Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.

О МАКСИМАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛУГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

М.И. Наумик

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, пр-т Московский 33, 210038, Витебск, Беларусь,
michaelnaumik@yandex.by

Продолжается изучение полугруппы линейных отношений [1, 2].

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем локальной.

Пусть V – конечноемерное векторное пространство над полем F.

Рассматорим в пространстве V цепь подпространств:

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{n-1} \supset V_n = \{0\}. \tag{1}$$

Будем говорить, что линейное отношение $a \in LR(V,F)$ аннулирует цепь (1), если оно аннулирует все факторы этой цепи, т.е. $V_i a \subseteq V_{i+1}$ или $a(V_i/V_{i+1}) = 0$.

Множество всех линейных отношений, аннулирующих цепь (1), назовем аннулятором цепи (1).

Теорема. *Пусть $S \subseteq LR(V,F)$, где F – поле характеристики 0. Мнжество S тогда и только тогда является максимальной локальной полугруппой, когда $S = G \cup N$ и существует разложение*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n,$$

для которого

1) $G = G_1 \dotplus \ldots \dotplus G_n$, где $G_i = G[V_i]$ – максимальныая неприводимая периодическая подгруппа из $GL(V_i,F)$;

2) N – аннулятор цепи $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = \{0\}$, где $V_{i-1} = V_i \oplus \ldots \oplus V_n$.

Этот результат обобщает один из фактов работы [3].

Литература

1. Маклейн С. *Алгебра аддитивных отношений* // Сб. переводов. Математика. 1963. № 7:6. С. 1–12.

2. Наумик М. И. *Полугруппа линейных отношений* // Доклады НАН Белоруси. 2004. Т. 48, № 3. С. 34–37.

3. Коряков И. О. *Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами* // Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. 1987. С. 72–80.