Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 3

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Г. М. ХАТИАШВИЛИ

О ДЕФОРМАЦИИ ОДНОРОДНЫХ И СОСТАВНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 1 II 1971)

1. Рассмотрим тело, обладающее в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси Ox_3 прямоугольной системы декартовых координат $Ox_1x_2x_3$.

В этом случае обобщенный закон Гука примет вид [1]

$$\begin{aligned} \tau_{jj} &= A_{1j}e_{11} + A_{2j}e_{22} + A_{3j}e_{33} + A_{6j}e_{12}, \\ \tau_{12} &= A_{16}e_{11} + A_{26}e_{22} + A_{36}e_{33} + A_{66}e_{12}, \\ \tau_{i3} &= A_{\gamma 5}e_{13} + A_{\gamma 4}e_{23} \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3;\ \gamma = 6-i), \end{aligned} \tag{1,1}$$

где τ_{ij} и e_{ij} — компоненты напряжения и деформации, а A_{jk} — модули упругости.

Пусть в пространстве (x_1, x_2, x_3) дано анизотропное тело Ω_c с полостью, ограниченное плоскостями $x_3 = 0$, $x_3 = h$ $(h > 0)$, внешней боковой поверхностью

$$\psi_2(x_1, x_2) = 0 \tag{1,2}$$

и поверхностью полости

$$\psi_1(x_1, x_2) = 0. \tag{1,3}$$

Предположим, что полость заполнена другим анизотропным материалом (обозначим область, занятую им, через Ω_1), склеенным с телом Ω_c по поверхности (1,3).

В работах [2, 3] с использованием результатов Г. Ю. Джанелидзе [4] построены алгоритмы решения задачи Альманзи при граничных условиях

$$\tau_{jn} = \tau_j(x_1, x_2)\, x_3^{\beta} \tag{1,4}$$

в точках поверхности (1,2),

$$[\tau_{jn}]_1 = [\tau_{jn}]_0, \quad [u_j]_1 = [u_j]_0 \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1,5}$$

в точках поверхности (1,3), где $\tau_j(x_1, x_2)$ — заданные функции,

$$\tau_{jn} \equiv \tau_{1j}n_1 + \tau_{2j}n_2 \quad (j = 1, 2, 3); \tag{1,6}$$

n_1 и n_2 — косинусы нормали к поверхностям (1,2) и (1,3), β — целое неотрицательное число, а u_j — компоненты смещения, соответствующие компонентам напряжения τ_{jk}. Символы $[\cdot]_1$ и $[\cdot]_0$ обозначают предельные значения (в точках поверхности) выражений, заключенных в квадратные скобки, взятых соответственно из областей Ω_1 и Ω_0.

В указанных работах доказана также разрешимость задачи Альманзи при наличии объемных сил и скачков в точках поверхности (1,3) векторов напряжения и смещения. Если эти объемные силы и скачки, как и боковая нагрузка (1,4), являются полиномами степени β относительно осевой координаты x_3, то компоненты τ_{ij} и u_j, являющиеся решением соответствующей задачи Альманзи, будут полиномами степеней $\beta + 2$ и $\beta + 4$ относительно x_3, т. е. функциями вида

$$\tau_{ij} = \sum_{k=0}^{\beta+2} \alpha_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)\, x_3^k, \quad u_j = \sum_{k=0}^{\beta+4} \alpha_j^{(k)}(x_1, x_2)\, x_3^k \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1,7}$$

2. Пусть в пространстве (y_1, y_2, y_3) дано анизотропное тело Ω_c^* с полостью, ограниченное плоскостями $y_3 = 0$ и $y_3 = h$, внешней поверхностью

$$\psi_2(y_1 - \gamma_1 \varepsilon y_1 y_3 - {}^1/_2\gamma_2\varepsilon y_3^2, \quad y_2 - \varepsilon\gamma_1 y_2 y_3 - {}^1/_2\gamma_2\varepsilon y_3^2) = 0 \tag{2,1}$$

и поверхностью полости

$$\psi_1(y_1 - \gamma_1 \varepsilon y_1 y_3 - {}^1/_2\gamma_2\varepsilon y_3^2, \quad y_2 - \varepsilon\gamma_1 y_2 y_3 - {}^1/_2\gamma_2\varepsilon y_3^2) = 0, \tag{2,2}$$

где ε — малый параметр, квадратами и более высокими степенями которого можно пренебречь, а γ_1 и γ_2 — числа, принимающие значения 0 и 1. Если $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0$, получим так называемое слегка коническое тело, а когда $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ — цилиндрическое тело со слабо изогнутой осью.

Как и в п. 1, пусть полость заполнена другим анизотропным материалом (область, занятую им, обозначим через Ω_1^*), склеенным с телом Ω_0^* по поверхности (2,2).

Полученное составное тело обозначим через Ω^*.

Требуется определить упругое равновесие тела Ω^*, когда заданные в точках внешней поверхности (2,1) усилия являются полиномами степени β относительно переменной y_3.

Искомые компоненты напряжения τ_{ij}^* должны удовлетворять в пространстве (y_1, y_2, y_3) в каждой из областей Ω_1^* и Ω_c^* однородным уравнением равновесия и условиям совместимости Сен-Венана; кроме того, должны быть выполнены граничные условия

$$\tau_{jn^*}^* \equiv \tau_{1j}^* n_1^* + \tau_{2j} n_2^* + \tau_{3j} n_3^* = \tau_j^*(y_1, y_2)\, y_3^\beta \tag{2,3}$$

в точках поверхности (2,1),

$$[\tau_{jn^*}^*]_1 = [\tau_{jn^*}^*]_0, \quad [u_j^*]_1 = [u_j^*]_0 \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2,4}$$

в точках поверхности (2,2), где n_1^*, n_2^* и n_3^* — косинусы нормали к поверхностям (2,1) и (2,2), $\tau_j^*(y_1, y_2)$ — заданые функции, а u_j^* — компоненты смещения.

Произведем подстановку [5]:

$$x_j = y_j(1 - \gamma_1\varepsilon y_3) + {}^1/_2\gamma_2\varepsilon y_3^2 \quad (j = 1, 2), \quad x_3 = y_3. \tag{2,5}$$

Тогда на поверхности (2,1) и (2,2) перейдут в пространстве (x_1, x_2, x_3) в цилиндрические поверхности (1,2) и (1,3).

Введем обозначение

$$\partial_j \equiv \partial / \partial x_j \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2,6}$$

С точностью до членов порядка ε^2, можно установить следующие зависимости [5]:

$$\begin{gathered} n_j^* = (1 - \gamma_1\varepsilon x_3)\, n_j, \quad n_3^* = \varepsilon n_{12}, \quad \partial/\partial y_j = (1 - \gamma_1\varepsilon x_3)\, \partial_j\, (j = 1, 2); \\ \partial/\partial y_3 = \partial_3 + \varepsilon\partial_{12}, \\ n_{12} \equiv (\gamma_2 x_3 - \gamma_1 x_1)\, n_1 + (\gamma_2 x_3 - \gamma_1 x_2)\, n_2, \\ \partial_{12} \equiv (\gamma_2 x_3 - \gamma_1 x_1)\, \partial_1 + (\gamma_2 x_3 - \gamma_1 x_2)\, \partial_2, \end{gathered} \tag{2,7}$$

где n_1 и n_2 — косинусы нормали к поверхностям (1,2) и (1,3).

Из (2,5), с точностью до членов порядка ε^2, получим

$$y_3 = x_3, \quad y_j = x_j - \varepsilon x_3(\gamma_1 + {}^1/_2\gamma_2 x_3) \quad (j = 1, 2). \tag{2,8}$$

Учитывая эти зависимости, с указанной точностью, по формуле Тейлора получим

$$\overset{*}{\tau}_j(y_1, y_2) = \tau_j(x_1, x_2) - \varepsilon x_3(\gamma_1 + {}^1/_2\gamma_2 x_3)(\partial_1\tau_j + \partial_2\tau_j), \tag{2,9}$$

где τ_j — значение функции τ_j^* при $x_3 = 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

Принимая во внимание (2,5), будем искать решение поставленной задачи (см. (2,3), (2,4)) в смещениях в виде

$$\overset{*}{u}_j = u_j(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon\widetilde{u}_j(x_1, x_2, x_3) \quad (j = 1, 2, 3), \tag{2,10}$$

где $\widetilde{u}_j$ подлежат определению, а u_j и соответствующие напряжения τ_{ij} — известные решения задачи Альманзи для цилиндрического тела Ω с граничными условиями (1,4), (1,5).

С учетом равенств (2,7) и (2,10), после подстановки в закон Гука (1,1) компонентов деформации

$$\overset{*}{e}_{jj} = \partial\overset{*}{u}_j/\partial y_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad \overset{*}{e}_{ij} = \partial\overset{*}{u}_i/\partial y_j + \partial\overset{*}{u}_j/\partial y_i \quad (i \neq j;\, i, j = 1, 2, 3) \tag{2,11}$$

получим следующие значения компонентов напряжения τ^*_{ij}, соответствующие смещениям u_j^* с точностью до членов порядка ε^2:

$$\overset{*}{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \varepsilon(\widetilde{\tau}_{ij} + \overset{0}{\tau}_{ij} - \gamma_1 x_3\tau_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{2,12}$$

где

$$\begin{gathered}\overset{0}{\tau}_{jj} = A_{j3}\partial_* u_3, \quad \overset{0}{\tau}_{12} = A_{36}\partial_* u_3, \quad \overset{0}{\tau}_{13} = \partial_*(A_{55}u_1 + A_{45}u_2), \\ \overset{0}{\tau}_{23} = \partial_*(A_{44}u_2 + A_{45}u_1) \quad (j = 1, 2, 3;\, \partial_* \equiv \gamma_1 x_3\partial_3 + \partial_{12}),\end{gathered} \tag{2,13}$$

а $\widetilde{\tau}_{ij}$ — искомые компоненты напряжения, соответствующие смещениям $\widetilde{u}_j$.

Легко видеть, что τ_{ij}^* и соответствующие им компоненты деформации e_{ij}^* будут удовлетворять в каждой из областей Ω_i^* и Ω_0^* уравнениям равновесия и условиям совместимости Сен-Венана, если $\widetilde{\tau}_{ij}$ и соответствующие им компоненты деформации $\widetilde{e}_{ij}$ будут удовлетворять (по переменным x_j) в каждой из областей Ω_1 и Ω_0 условиям совместимости Сен-Венана и уравнениям равновесия

$$\partial_1\widetilde{\tau}_{1j} + \partial_2\widetilde{\tau}_{2j} + \partial_3\widetilde{\tau}_{3j} + \widetilde{X}_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{2,14}$$

где

$$\widetilde{X}_j = \sum_{k=0}^{\beta+5}\widetilde{\alpha}_j(x_1, x_2)\,x_3^k \quad (j = 1, 2, 3), \tag{2,15}$$

$\widetilde{\alpha}_j$ — известные функции, а β — показатель степени переменной x_3 в условиях (2,3).

Учитывая значения (2,12), компоненты вектора напряжения $\overset{*}{\tau}_{jn^*}$, определенные равенством (2,3), в котором n^* даны равенствами (2,7), можно представить в виде

$$\tau^*_{jn^*} = \tau_{jn}(1 - 2\gamma_1\varepsilon x_3) + \varepsilon(\widetilde{\tau}_{jn} + \overset{0}{\tau}_{jn} + \tau_{j3}n_{12}) \quad (j = 1, 2, 3), \tag{2,16}$$

где оператор τ_{jn} определен равенством (1,6).

Учтем равенства (1,7) и (2,9) и подставим выражения (2,10) и (2,16) в граничные условия (2,3), (2,4). Тогда легко понять, что искомые τ_{ij} и $\widetilde{u}_j$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\widetilde{\tau}_{jn} = \sum_{k=0}^{\beta+5}\widetilde{\alpha}_j^0(x_1 x_2)\,x_3^k \ \ (j=1, 2, 3) \tag{2,17}$$

в точках поверхности (1,2),

$$[\widetilde{\tau}_{jn}]_1 - [\widetilde{\tau}_{jn}]_0 = \sum_{k=0}^{\beta+5} \widetilde{\alpha}_j^1 (x_1, x_2)\, x_3^k, \quad [\tilde{u}_j]_1 = [\tilde{u}_j]_0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

в точках поверхности (1,3), где $\tilde{\alpha}_j^0$ и $\tilde{\alpha}_j^1$ — известные функции.

Итак, искомые $\tilde{\tau}_{ij}$ и $\tilde{u}_j$ являются решением задачи Альманзи для цилиндрического тела Ω с боковой нагрузкой (2,17) при наличии объемных сил вида (2,15) и заданных скачков (2,18) в точках поверхности (1,3).

Эта задача изучена в работах ([2], [3]).

Очевидно, полученные результаты будут справедливы и в том случае, когда тело состоит из нескольких анизотропных материалов.

В частном случае можно получить решение рассматриваемой задачи для однородного (рассматриваемого класса) изотропного тела.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
22 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Лехнецкий, Теория упругости анизотропного тела, М.—Л., 1950. [2] Г. М. Хатиашвили, Тр. Вычислит. центра АН ГрузССР, 3 (1963). [3] Г. М. Хатиашвили, Тр. Вычислит. центра АН ГрузССР, 4 (1963). [4] Г. Ю. Джанелидзе, Проблемы механики сплошной среды, М., 1961. [5] П. М. Риз, ДАН, 24, 2 (1939).