Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ

С. В. Балычев (Гомель, Беларусь)[1], Т. И. Васильева (Гомель, Беларусь)[2]

Все рассматриваемые в данной работе группы конечные. Используются определения и обозначения из [6] и [9].

Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — класс групп. В соответствии с [6] через $C_\pi\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп, у которых имеется по крайней мере одна π-холлова подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$, и любые две π-холловы подгруппы сопряжены.

Если π состоит из одного простого числа p и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ — класс всех групп, то по теореме Силова $C_{\{p\}}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}$. Однако группа может не иметь π-холловых подгрупп, если в π входит 2 и более простых чисел. Например, в знакопеременной группе A_5 на 5 символах нет $\{2,5\}$-холловых подгрупп, хотя $\{2,5\} \subseteq \pi(A_5)$.

В 1928 году Ф. Холл [10] доказал, что для любого множества простых чисел π во всякой разрешимой группе G существует π-холлова подгруппа, любые две π-холловы подгруппы сопряжены, каждая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе из G. Ввиду этого класс $C_\pi\mathfrak{E}$ содержит все разрешимые группы.

Свойства класса групп $C_\pi\mathfrak{F}$ для различных $\mathfrak{F}$ исследовались в работах [4, 5, 7, 8]. В [6, проблема 19] была выдвинута гипотеза: пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, тогда $C_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. В [7] для произвольной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ был получен критерий насыщенности $C_\pi\mathfrak{F}$ в предположении, что $C_\pi\mathfrak{F}$ — формация. Там же был приведен пример, показывающий, что формация $C_\pi\mathfrak{N}$ в общем случае не является насыщенной. В [4] было доказано, что для любой формации $\mathfrak{F}$ и любого множества простых чисел π класс $C_\pi\mathfrak{F}$ является формацией. В этой же работе были найдены условия, при которых формация $C_\pi\mathfrak{F}$ является p-насыщенной или p-разрешимо насыщенной.

Определение. Пусть t — натуральное число и $\mathfrak{F}$ — класс групп. Обозначим через $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ следующий класс групп: $\mathrm{H}_t\mathfrak{F} = \cap\, C_{\pi_i}\mathfrak{F}$ по всем $\pi_i \subseteq \mathbb{P}$ таким, что $|\pi_i| = t$.

Ясно, что класс $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ наследует свойства $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. В то же время $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ имеет более сильные свойства, чем $C_{\pi_i}\mathfrak{F}$. Например, $\mathrm{H}_2\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ — насыщенная формация, а в [7] показано, что формация $C_{\{3,11\}}\mathfrak{N}$ является композиционной, но не является насыщенной.

В классе всех разрешимых групп получена

Теорема. *Пусть t — натуральное число, $t \geqslant 2$, $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и F — её максимальный внутренний локальный экран. Тогда $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией и имеет максимальный внутренний локальный экран H такой, что*

$$H(p) = \begin{cases} \mathrm{H}_tF(p),\ \ H(p) \cap \mathfrak{S}_{p'} = \mathrm{H}_{t-1}(F(p) \cap \mathfrak{S}_{p'}) & \text{для любого } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing & \text{для любого } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Используя эту теорему, найдем $\mathrm{H}_t\mathfrak{F}$ для некоторых конкретных формаций $\mathfrak{F}$.

В [1, 2] был изучен класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа либо

 Получено 14.12.2017. УДК 512.543.

[1]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины.
E-mail: sergey.baluchev@gmail.com.

[2]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины;
Белорусский государственный университет транспорта. E-mail: tivasilyeva@mail.ru.

совпадает с группой, либо может быть соединена с ней цепью подгрупп с простыми индексами. Отметим, что класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [2].

Пример 1. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, то $\mathrm{H}_2\mathfrak{U} = \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Подгруппа M группы G называется *модулярной* в G [11], если она является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы, т. е. если выполняются следующие условия:

1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$;

2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G [12], если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{s-1} \le H_s = G$ такая, что H_{i-1} — модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \ldots, s$. Сверхразрешимая группа называется *сильно сверхразрешимой* [3], если в ней любая силовская подгруппа субмодулярна.

В [3] были введены и изучены следующие классы групп: $s\mathfrak{U}$ — класс всех сильно сверхразрешимых групп, $sm\mathfrak{U}$ — класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами. В частности, эти классы являются наследственными насыщенными формациями, $sm\mathfrak{U}$ — собственный подкласс из $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \ne s\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U} \ne sm\mathfrak{U}$.

Пример 2. Если $\mathfrak{F} = sm\mathfrak{U}$, то $\mathrm{H}_2(s\mathfrak{U}) = sm\mathfrak{U}$.

Пример 3. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ — класс всех групп с нильпотентным коммутантом, то $\mathfrak{N}\mathfrak{A} \subset \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Здесь $\mathcal{A}$ — класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами, $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ — класс всех групп с нильпотентным $\mathcal{A}$-корадикалом.

Отметим, что симметрическая группа S_4 принадлежит $\mathfrak{N}\mathcal{A}$, но $S_4 \notin \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$. Группа из примера 1 [2] принадлежит $\mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A})$, но ее коммутант не является нильпотентным. Таким образом, $\mathfrak{N}\mathfrak{A} \ne \mathrm{H}_2(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) \ne \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Литература

1. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // Проблемы физики, математики и техники. 2010. № 2 (3). С. 21—27.
2. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270—1281.
3. *Васильев В. А.* Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277—1288.
4. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О., Шеметков Л. А.* Формации конечных C_π-групп // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 40—52.
5. *Слепова Л. М.* О формациях $E^{\mathfrak{F}}$-групп // Доклады АН БССР. 1977. Т. 21, № 7. С. 587—589.
6. *Шеметков, Л. А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
7. *Шеметков Л. А., Васильев А. Ф.* Нелокальные формации конечных групп // Доклады АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 4. С. 5—8.
8. *Blessenohl D.* Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1975. Vol. 142, № 3. P. 299—300.
9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
10. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. Vol. 3. P. 98—105.
11. *Schmidt R.* Subgroup Lattices of Groups. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1994. 572 p.
12. *Zimmermann I.* Submodular Subgroups in Finite Groups // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545—557.