

К. С. ШИФРИН, Б. З. МОРОЗ, А. Н. САХАРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ ПО ДАННЫМ О ЕЕ ПРОЗРАЧНОСТИ

(Представлено академиком А. М. Обузовым 22 I 1971)

1. Рассмотрим параллельный пучок света интенсивности I_0 , проходящий через слой дисперсной среды толщины l . Пусть S — площадь поперечного сечения пучка, n — число рассеивающих центров в единице объема (рис. 1). Предполагая для простоты, что рассеивающие частицы суть сферы с эффективным поперечником ослабления s_0 , мы приходим к следующей статистической модели явления ослабления параллельного пучка света. Спроектируем все рассеивающие сферы на поперечное сечение пучка и пусть Y — площадь, свободная от проекций сфер. Ясно, что интенсивность выходящего света равна $I = I_0 Y/S$. Вычисляя среднее значение и дисперсию случайной величины Y , найдем среднее и дисперсию энергии выходящего пучка. Мы покажем далее, что экспериментальное измерение этих величин дает возможность определить оптическую толщину среды, эффективный поперечник ослабления рассеивающих частиц и среднюю (за определенное время наблюдения) плотность $\bar{n}$ этих частиц в среде.

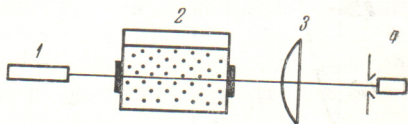


Рис. 1

2. Рассмотрим задачу о случайном бросании кругов на квадрат. Предположим, что круги бросают независимо, и пусть p_k — вероятность того, что центры ровно k кругов упали на квадрат. Нас интересует случайная величина y — площадь части квадрата, не занятой кругами. Моменты этой случайной величины определяются с помощью теоремы Н. Robbins'a ⁽¹⁾, вытекающей, как отмечено в ⁽²⁾ *, из общих свойств условных математических ожиданий, установленных А. Н. Колмогоровым ⁽³⁾. Из этой теоремы следует, что l -й момент случайной величины y

$$E(y^l) = \int_{\substack{x_i \in A \\ 1 \leq i \leq l}} p(x_1, \dots, x_l) dx_1 \dots dx_l,$$

где через A обозначен рассматриваемый квадрат; $p(x_1, \dots, x_l)$ — вероятность того, что ни одна из точек x_i ($1 \leq i \leq l$) не покрыта кругами.

Для вычисления $p(x_1, \dots, x_l)$ достаточно найти площадь общей части кругов. Мы ограничимся изучением среднего значения и дисперсии рассматриваемой случайной величины.

Предположим, что число кругов, центры которых упали на единичный квадрат A , распределено по закону Пуассона: $p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$. Пренебрегая для простоты явлениями на границе квадрата (что возможно, если относительная (безразмерная) площадь $s = \pi r^2$ каждого из падающих кругов до-

* Эта книга была указана нам К. П. Латышевым.

статочна мала), получим (ср. (4))

$$E(y) = e^{-\lambda s}; \quad (1)$$

$$\sigma_y^2 = se^{-2\lambda s} \left(2 \int_0^\pi a(\tau, \varphi) d\varphi + \frac{16r}{\pi} \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} a(\tau, \varphi) d\varphi - \frac{8r^2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \frac{\varphi}{2} a d\varphi \right), \quad (2)$$

$$a = a(\tau, \varphi) = \sin \varphi \left(\exp \frac{\tau(\varphi - \sin \mu)}{\pi} - 1 \right). \quad (3)$$

Здесь λ — среднее число кругов, упавших на квадрат, $\tau = \lambda s$.

3. В нашей модели $s = s_0 / S$ — относительный поперечник ослабления света частицами среды, $\lambda = \bar{n}lS$ — среднее число рассеивающих центров в освещенном объеме среды; оптическая толщина среды равна $\tau = \lambda s = \bar{n}ls_0$.

Считая $r \ll 1$ (так что вторым и третьим слагаемыми в (2) можно пренебречь), из (1) — (3) получим (здесь $\lambda = \bar{N}$)

$$\bar{I} = I_0 e^{-\tau}; \quad (4)$$

$$D = \overline{(\Delta I)^2} = I_0^2 \varphi(\tau) / \bar{N},$$

$$\varphi(\tau) = 2\tau e^{-2\tau} \int_0^\pi a(\tau, \varphi) d\varphi. \quad (5)$$

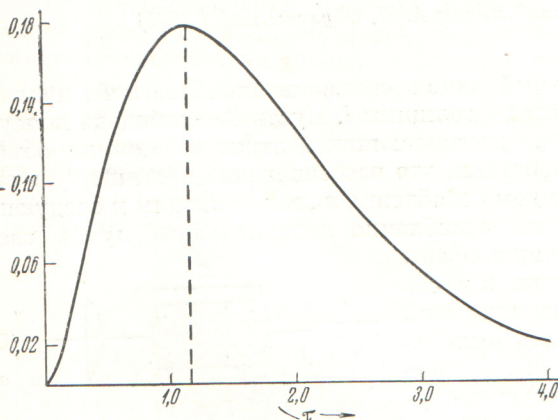


Рис. 2

Формула (4) выражает обычный закон Бугера — Ламберта. Интерес представляет соотношение (5), с помощью которого по измеренным дисперсии D и оптической толщине τ (τ можно определить из (4)) находим $\bar{N}$ и, следовательно, $\bar{n}$ и s_0 .

Сделаем несколько замечаний о поведении функции $\varphi(\tau)$ (график функции приведен на рис. 2) *.

В нуле и на бесконечности значения φ равны 0, она принимает максимум, равный 0,1770, в точке $\tau = 1, 2$ (в окрестности которой целесообразно вести наблюдения); имеют место оценки: $\tau^2 e^{-2\tau} \leq \varphi(\tau) \leq 4\tau e^{-\tau}$, $\varphi(\tau) \sim \tau^2$ при $\tau \rightarrow 0$. Соотношение $\varphi(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0, \infty$ физически объясняется тем, что в первом случае ($\tau \rightarrow 0$) мало ослабление и приемник регистрирует практически невозмущенный пучок, во втором случае ($\tau \rightarrow \infty$) дисперсия мала, потому что много частиц и поток практически не флуктуирует.

Заметим, что коэффициент вариации $\gamma = \sqrt{D/I} = \sqrt{2\tau/\bar{N}} \left(\int_0^\pi a(\tau, \varphi) d\varphi \right)^{1/2}$

есть монотонно возрастающая функция τ , причем $\gamma \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, так что дисперсия падает медленнее, чем квадрат интенсивности.

4. Приведем схему эксперимента, представленного с целью проверки описанной методики. Экспериментальная установка (рис. 1) содержит источник параллельного света (1), кювету с взвешенными в воде калиброванными частицами (2) и приемник, состоящий из линзы (3), фокусирующей пучок на диафрагму фотоумножителя (4). В качестве источника света

* Авторы признательны В. И. Бабанину и В. Г. Турикову за помощь в составлении таблицы этой функции.

использовался газовый лазер с углом расходимости пучка $10'$ и длиной волны $0,63 \mu$. Фокусирующая линза после кюветы необходима, чтобы исключить рассеянный свет. Угловая апертура диафрагмы составляет $10'$, так что весь прошедший свет попадает на фотоумножитель. В качестве калиброванных частиц взяты шарики из полистирола диаметром $50-54 \mu$. Регистрирующая часть прибора состоит из усилителя постоянного тока и выпрямителя. Выпрямленная переменная составляющая подается на самописец, показания которого дают среднюю амплитуду флуктуации интенсивности прошедшего света. Эта величина по своему значению несколько меньше величины дисперсии, но экспериментально получается гораздо проще.

Результаты измерений приведены в табл. 1. Для вычисления поперечников частиц используется формула, получающаяся из (5):

$$|\overline{\Delta I}| / I_0 = \sqrt{\varphi_1(\tau) s_0 / S}, \quad (6)$$

где $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau) / \tau$.

В условиях эксперимента $\rho = 2\pi a / \lambda = 250$. Угол раствора конуса, из которого приемник собирает рассеянный свет, равен $\beta = 5' = 1,45 \cdot 10^{-3}$. Из формулы (6.12) в ⁽⁵⁾ находим, что в этом случае эффективный поперечник ослабления частиц будет равен $s_0 = 1,965 \pi a^2 \approx 2\pi a^2$ (a — радиус частиц).

Из табл. 1 видно, что вычисленные значения диаметров частиц меньше истинных примерно на 20%. Это занижение результатов, вероятно, вызвано двумя причинами.

1. Излучение стандартного гелий-неонового лазера, которым мы располагали, само испытывало колебания интенсивности как медленные с частотой $0,1$ гц, так и быстрые с частотами 50 гц. Поэтому нам пришлось ввести в регистрирующую систему полосовой фильтр с полосой пропускания $0,2-10$ гц. После этого сигнал в отсутствие частиц на пути луча был весьма стабилен. Поскольку частота флуктуации, вызванной случайным движением частиц, лежит в области долей герца, пришлось увеличить скорость хаотического перемещения частиц с помощью механического перемешивания жидкости. При этом исследуемые нами интенсивности имели частоты в полосе от нуля до нескольких герц. Верхняя граница фильтра заведомо не ослабляла измеряемые амплитуды флуктуаций, так как лежит значительно выше граничной частоты исследуемых сигналов. Нижняя же граница фильтра не пропускала низкочастотных флуктуаций. В условиях нашего эксперимента их вклад в величину $|\overline{\Delta I}| / I_0$ составлял $5-10\%$, что вызвало занижение получаемых радиусов частиц на ту же величину.

2. Замена среднего квадратического отклонения $((\overline{\Delta I})^2)^{1/2}$, для которого выведена формула (5), на среднее линейное $|\overline{\Delta I}|$ также приводит к занижению результатов. Например, для гауссова распределения это приводит к ошибке в 20% .

Ленинградское отделение
Института океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило
25 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Robbins, Ann. Math. Stat., 15, № 1 70 (1944). ² М. G. Kendall, P. A. P. Moran, Geometrical Probability, 1963. ³ А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936. ⁴ Н. Е. Robbins, Ann. Math. Statistics, 16, № 4, 342 (1945). ⁵ К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, М.—Л., 1951.