Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2019. Том 60, № 1

УДК 512.542

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЯДРА π–ПРЕФРАТТИНИЕВОЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Йи, С. Ф. Каморников, Л. Сяо

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел и H — π-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G. Доказывается, что существуют элементы $x, y, z \in G$, для которых выполняется равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_\pi(G)$.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.106

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, π-префраттиниева подгруппа, холлова подгруппа, подгруппа Фраттини.

1. Введение

В [1] показано, что если $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, H — $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G и $\Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ — пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп из G, то справедливы следующие утверждения:

1) $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x, y и z из G;

2) если либо группа G является S_4-свободной, либо формация $\mathfrak{F}$ состоит из S_3-свободных групп, то $H \cap H^x \cap H^y = \Delta_{\mathfrak{F}}(G)$ для некоторых x и y из G.

Частные аспекты этого результата рассматривались в [2] ($\mathfrak{F}$ — формация единичных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G) и [3] ($\mathfrak{F}$ — формация всех нильпотентных групп, $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \Delta(G)$ — подгруппа Гашюца группы G, т. е. пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G).

Поскольку $\Delta_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Core}_G(H) = \bigcap_{x \in G} H^x$ для любой $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппы H группы G, по сути, речь идет о возможности представления ядра $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппы в виде пересечения ограниченного числа (трех или четырех) сопряженных с ней подгрупп.

Отметим, что постановка такой задачи инициирована центральными результатами из [4–7]. В [4] Пассман доказал, что в каждой p-разрешимой группе G найдутся три силовские p-подгруппы, пересечение которых равно $O_p(G)$. В. И. Зенков в [5] установил, что аналогичный результат имеет место в любой конечной группе. В [6] Долфи доказал, что если $2 \notin \pi$, то в каждой π-разрешимой группе G найдутся три холловы π-подгруппы, пересечение которых равно $O_\pi(G)$. Позже в [7] установлено, что если H — холлова π-подгруппа

The first author was supported by the NNSF of China (Grant N 11471055) and the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant N LY18A010028).

π-разрешимой группы G, то $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G (см. также [8]).

В данной работе приведенный результат об $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгруппах конечной разрешимой группы G распространяется на ее π-префраттиниевы подгруппы. Отметим, что в общем случае множество всех π-префраттиниевых подгрупп группы G не совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп (это показывается в разд. 5).

Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\Phi_\pi(G)$ — пересечение всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не делятся на числа из π. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если H — π-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G, то справедливы следующие утверждения:*

1) *$H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x, y и z из G;*

2) *если группа G является S_4-свободной, то $H \cap H^x \cap H^y = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G;*

3) *если $2 \notin \pi$ и $3 \notin \pi$, то $H \cap H^x \cap H^y = \Phi_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G.*

2. Предварительные результаты

Далее в работе под группой всегда понимается конечная разрешимая группа. Используются определения и обозначения, принятые в [9].

Концепция префраттиниевой подгруппы предложена Гашюцем [10] в 1962 г. В оригинальном изложении префраттиниева подгруппа определяется как пересечение дополнений корон всех дополняемых главных факторов некоторого фиксированного главного ряда группы. Такой подход в дальнейшем широко исследовался и многократно обобщался. Наиболее яркое развитие он получил в работе Хоукса [11], который для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ ввел понятие $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппы, рассматривая дополнения корон не всех дополняемых главных факторов, а лишь $\mathfrak{F}$-эксцентральных.

Отметим, что известны подходы (см., например, [12–14]), не использующие понятие короны дополняемого главного фактора. Один из таких подходов, рассматривающий обобщенно префраттиниеву подгруппу группы G как пересечение некоторых ее максимальных подгрупп, мы используем при определении π-префраттиниевой подгруппы.

Определение 2.1. Пусть π — некоторое множество простых чисел,

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = G$$

— главный ряд группы G и $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех дополняемых главных π'-факторов этого ряда. Пусть M_i $(i \in I)$ — максимальная подгруппа группы G, которая дополняет главный фактор A_i/A_{i-1}. Тогда подгруппа $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$ называется π-*префраттиниевой* подгруппой группы G (если в G нет дополняемых главных π'-факторов, то π-префраттиниевой подгруппой группы G считается сама группа G).

Проверка показывает, что определение π-префраттиниевой подгруппы корректно: оно не зависит от выбора главного ряда группы. Из определения следует также, что π-префраттиниева подгруппа существует в любой группе.

Далее понадобится информация о свойствах подгруппы $\Phi_\pi(G)$. Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 2.1. *Для любой группы G и любого множества π простых чисел справедливы следующие утверждения:*

1) $O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G)$ *и* $\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G))$;
2) *если* $N \lhd G$, *то* $\Phi_\pi(G)N/N \subseteq \Phi_\pi(G/N)$;
3) *если* $N \lhd G$ *и* $N \subseteq \Phi_\pi(G)$, *то* $\Phi_\pi(G)N/N = \Phi_\pi(G/N)$;
4) $\Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = 1$.

Основные свойства π-префраттиниевых подгрупп приведем в виде лемм. Напомним только, что если H — подгруппа группы G и A/B — ее нормальная секция, то говорят, что

— H *покрывает* A/B, если $HB \supseteq A$;
— H *изолирует* A/B, если $H \cap A \subseteq B$.

Лемма 2.2 [15, теорема 2]. *Пусть H — π-префраттиниева подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $N \lhd G$, *то* HN/N — *π-префраттиниева подгруппа группы* G/N;
2) *H покрывает все главные π-факторы и все фраттиниевы главные факторы группы G;*
3) *H изолирует все дополняемые главные π'-факторы группы G;*
4) $\mathrm{Core}_G(H) = \Phi_\pi(G)$;
5) *любые две π-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены.*

Лемма 2.3. *Пусть N — минимальная нормальная π'-подгруппа группы G. Если M — максимальная подгруппа группы G, дополняющая N, то каждая π-префраттиниева подгруппа из M является π-префраттиниевой подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть H — π-префраттиниева подгруппа из M. Пусть $1 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = M$ — главный ряд группы M и $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех дополняемых главных π'-факторов этого ряда. По определению 2.1 $H = \bigcap_{i\in I} M_i$, где M_i $(i \in I)$ — максимальная подгруппа группы M, которая дополняет главный π'-фактор A_i/A_{i-1}.

Рассмотрим нормальный ряд

$$1 \subset N = A_0N \subset A_1N \subset \cdots \subset A_nN = MN = G \tag{1}$$

группы G. Так как

$$A_jN/A_{j-1}N \cong A_j/A_j \cap A_{j-1}N = A_j/A_{j-1}(A_j \cap N) = A_j/A_{j-1}$$

для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, этот ряд является главным рядом группы G. Поскольку отображение $\alpha : mN \mapsto m$ является изоморфизмом групп G/N и M, фактор $A_jN/A_{j-1}N$ является π'-фактором тогда и только тогда, когда фактор A_j/A_{j-1} является π'-фактором. Поэтому в ряду (1) π'-факторами будут только факторы N и $A_jN/A_{j-1}N$ для всех $j \in I$, причем все эти факторы дополняемы: подгруппа N дополняется подгруппой M по условию, а дополнением к главному фактору $A_jN/A_{j-1}N$ $(j \in I)$ является подгруппа M_jN.

Отсюда следует, что $M \cap \bigl(\bigcap_{i\in I} M_iN\bigr)$ — π-префраттиниева подгруппа группы G. Очевидно, что

$$H = \bigcap_{i\in I} M_i \subseteq M \cap \Bigl(\bigcap_{i\in I} M_iN\Bigr).$$

Так как по лемме 2.2 подгруппы H и $M\cap\big(\bigcap\limits_{i\in I} M_iN\big)$ изолируют все дополняемые главные π'-факторы ряда (1) и покрывают все его остальные главные факторы, ввиду леммы A.1.7 из [9] имеем $|H| = \big|M \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} M_iN\big)\big|$. Отсюда и из $H \subseteq M \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} M_iN\big)$ следует, что $H = M \cap \big(\bigcap\limits_{i\in I} M_iN\big)$, т. е. H — π-префраттиниева подгруппа группы G. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть N — нормальная π'-подгруппа группы G, содержащаяся в $\mathrm{Soc}(G)$. Если H — подгруппа группы G такая, что $G = HN$ и $H \cap N = 1$, то $\Phi_\pi(G) = C_{\Phi_\pi(G)}(N)$.*

Доказательство. Пусть T — пересечение всех максимальных подгрупп группы G, которые содержат N и индексы которых не делятся на числа из π. Тогда $\Phi_\pi(G) \subseteq T$ и $T/N = \Phi_\pi(G/N)$. Ввиду естественного изоморфизма $H \cong HN/N = G/N$ имеем $\Phi_\pi(G/N) = \Phi_\pi(H)N/N$. Теперь из $\Phi_\pi(G)N/N \subseteq \Phi_\pi(G/N)$ следует включение $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(H)N$.

Пусть W — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N. Тогда $N = W \times W^*$, где W^* — нормальная подгруппа группы G. Так как подгруппа W дополняема в G максимальной подгруппой W^*H, индекс которой не делится на числа из π, то $\Phi_\pi(G) \cap N = 1$. Следовательно,

$$\Phi_\pi(G) \subseteq C_G(N) \cap \Phi_\pi(H)N = (C_G(N) \cap \Phi_\pi(H))N = C_{\Phi_\pi(H)}(N) \times N.$$

Пусть $K = C_{\Phi_\pi(H)}(N)$. Ясно, что $N_G(K) \supseteq \langle H, N\rangle = G$, т. е. K — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что найдется не содержащая K максимальная подгруппа M группы G, индекс которой не делится на числа из π. В этом случае $KM = G$. Если $N \subseteq M$, то M/N — максимальная подгруппа группы G/N, а значит, $M \cap H$ — максимальная подгруппа группы H. Кроме того, индекс $|H : M \cap H| = |G : M|$ не делится на числа из π. Но тогда $K \subseteq \Phi_\pi(H) \subseteq M \cap H \subseteq M$, что противоречит предположению.

Итак, N не содержится в M. Пусть $D = M \cap N$. Так как $N \subseteq \mathrm{Soc}(G)$, найдется минимальная нормальная подгруппа V группы G такая, что $N = V \times D$. Значит, M и DH — максимальные подгруппы группы G, дополняющие V. Подгруппы M и DH не сопряжены в G, так как DH содержит нормальную подгруппу K, а M не содержит K ввиду предположения. Тогда на основании утверждения A.16.9 из [9] $M \cap DH$ — максимальная подгруппа группы DH. Так как $M \cap DH = (M \cap H)D$, подгруппа $M \cap H$ максимальна в H. Поскольку $MK = G$ и $K \subseteq H$, то $MH = G$. Отсюда $|G| = |MH| = |M||H|/|M \cap H|$, а значит, $|G : M| = |G|/|M| = |H : H \cap M|$ не делится на числа из π, поэтому $K \subseteq \Phi_\pi(H) \subseteq M \cap H \subseteq M$. Снова пришли к противоречию.

Итак, каждая максимальная подгруппа группы G, индекс которой не делится на числа из π, содержит K, тем самым $K \subseteq \Phi_\pi(G)$. Окончательно имеем $\Phi_\pi(G) = \Phi_\pi(G) \cap NK = (\Phi_\pi(G) \cap N)K = K$. Лемма доказана.

Будем опираться на следующие результаты, которые приведем в виде лемм.

Лемма 2.5 [7, теорема 1.4]. *Пусть G — разрешимая группа и V — конечный точный G-модуль. Если V вполне приводим, то существуют такие элементы $v_1, v_2, v_3 \in V$, для которых справедливо равенство $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) \cap C_G(v_3) = 1$.*

Лемма 2.6 [9, лемма A.16.3]. *Пусть $G = NH$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы N и подгруппы H. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $n \in N$, *то* $H \cap H^n = C_H(n)$;
2) $\mathrm{Core}_G(H) = C_H(N)$.

Лемма 2.7 [1, лемма 21]. *Пусть G — разрешимая группа и V — конечный точный и вполне приводимый G-модуль. Пусть H — подгруппа из G такая, что полупрямое произведение VH является S_4-свободным. Тогда H имеет не менее двух регулярных орбит на $V \oplus V$.*

Напомним, что группа называется *S_4-свободной*, если она не имеет секций, изоморфных симметрической группе степени 4.

3. Минимальный контрпример

Пусть H и K — подгруппы группы G, причем $K = \mathrm{Core}_G(H)$. Следуя [1], будем говорить, что тройка (G, H, K) является *k-сопряженной системой*, если в G существуют такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_k$, что $K = H^{g_1} \cap H^{g_2} \cap \cdots \cap H^{g_k}$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, H — π-префраттиниева подгруппа группы G. Полагаем далее, что G — группа наименьшего порядка, для которой тройка $(G, H, \Phi_\pi(G))$ не является k-сопряженной системой. Тогда

3.1. $\Phi_\pi(G) = 1$. *В частности,* $\Phi(G) = 1$.

Сначала предположим, что $\Phi_\pi(G) \neq 1$. Тогда $H\Phi_\pi(G)/\Phi_\pi(G)$ — π-префраттиниева подгруппа группы $G/\Phi_\pi(G)$ ввиду леммы 2.2. Так как $|G/\Phi_\pi(G)| < |G|$, то $(G/\Phi_\pi(G), H\Phi_\pi(G)/\Phi_\pi(G), \Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G))$ — k-сопряженная система. Кроме того, из свойств подгруппы $\Phi_\pi(G) \neq 1$ (лемма 2.1) следует, что $\Phi_\pi(G/\Phi_\pi(G)) = 1$. Поэтому тройка $(G, H, \Phi_\pi(G))$ является k-сопряженной системой. Пришли к противоречию. Следовательно, утверждение 3.1 верно.

3.2. *Существуют минимальная нормальная подгруппа N и максимальная подгруппа M такие, что $G = MN$, $M \cap N = 1$ и тройка $(M, H, \Phi_\pi(M))$ является k-сопряженной системой.*

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Phi_\pi(G) = 1$, то $O_\pi(G) = 1$ и $\Phi(G) = 1$. Поэтому из разрешимости группы G имеем, что N — дополняемая π'-подгруппа группы G, а значит, существует такая максимальная подгруппа M группы G, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Ввиду леммы 2.3 можно полагать, что $H \subseteq M$. В силу выбора группы G тройка $(M, H, \Phi_\pi(M))$ является k-сопряженной системой. Следовательно, в M найдутся элементы $m_1, m_2, \ldots, m_k$, для которых выполняется равенство $\Phi_\pi(M) = H^{m_1} \cap H^{m_2} \cap \cdots \cap H^{m_k}$.

3.3. *Подгруппа N является точным вполне приводимым $\Phi_\pi(M)$-модулем над полем F_p из p элементов. В частности,* $\mathrm{Core}_{\Phi_\pi(M)N}(\Phi_\pi(M)) = 1$.

Очевидно, что N — неприводимый M-модуль над полем F_p. По теореме Клиффорда (см. [9, теорема B.7.3]) N является вполне приводимым $\Phi_\pi(M)$-модулем. Ввиду леммы 2.4 и утверждения 3.1 имеет место равенство $C_G(N) = 1$. Поэтому $\Phi_\pi(M)$-модуль N точный. Отсюда $\mathrm{Core}_{\Phi_\pi(M)N}(\Phi_\pi(M)) = 1$.

3.4. *Тройка $(\Phi_\pi(M)N, \Phi_\pi(M), 1)$ не является k-сопряженной системой.*

Предположим, что тройка $(\Phi_\pi(M)N, \Phi_\pi(M), 1)$ является k-сопряженной системой. Тогда по определению найдутся элементы $h_1, h_2, \ldots, h_k$ из $\Phi_\pi(M)N$ такие, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} (\Phi_\pi(M))^{h_i} = 1$. Так как элемент h_i представим в виде $h_i = f_i n_i$

для некоторых $f_i \in \Phi_\pi(M)$ и $n_i \in N$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, справедливо равенство $\bigcap\limits_{i=1}^{k} (\Phi_\pi(M))^{n_i} = 1$.

Рассмотрим подгруппу $D = \bigcap\limits_{i=1}^{k} H^{m_i n_i}$. Ввиду леммы Фраттини имеем

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} H^{m_i n_i} N = \bigcap_{i=1}^{k} H^{m_i} N = \left(\bigcap_{i=1}^{k} H^{m_i} \right) N = \Phi_\pi(M) N,$$

откуда

$$D = D \cap \Phi_\pi(M)N = \bigcap_{i=1}^{k} H^{m_i n_i} \cap \Phi_\pi(M)N$$
$$= \bigcap_{i=1}^{k} (H^{m_i} \cap \Phi_\pi(M)N)^{n_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \Phi_\pi(M)^{n_i} = 1 = \Phi_\pi(G).$$

Таким образом, тройка $(G, H, \Phi_\pi(G))$ является k-сопряженной системой, что противоречит предположению.

4. Доказательство теоремы

1. Предположим, что утверждение 1 теоремы неверно и G — контрпример минимального порядка. Тогда если H — π-префраттиниева подгруппа группы G, то тройка $(G, H, \Phi_\pi(G))$ не является 4-сопряженной системой. При этом утверждения 3.1–3.4 имеют место при $k = 4$. В частности, согласно утверждениям 3.1 и 3.3 $\Phi_\pi(G) \cap N = 1$ и N — точный вполне приводимый $\Phi_\pi(M)$-модуль над полем F_p из p элементов. Ввиду леммы 2.5 существуют элементы $n_1, n_2, n_3 \in N$, для которых $C_{\Phi_\pi(M)}(n_1) \cap C_{\Phi_\pi(M)}(n_2) \cap C_{\Phi_\pi(M)}(n_3) = 1$. Отсюда по лемме 2.6 имеем

$$\Phi_\pi(M) \cap (\Phi_\pi(M))^{n_1} \cap (\Phi_\pi(M))^{n_2} \cap (\Phi_\pi(M))^{n_3} = 1.$$

Тогда тройка $(\Phi_\pi(M)N, \Phi_\pi(M), 1)$ является 4-сопряженной системой, что противоречит утверждению 3.4 минимального контрпримера. Утверждение 1 теоремы доказано.

2. Предположим, что утверждение 2 теоремы неверно и G — контрпример минимального порядка. Тогда если H — π-префраттиниева подгруппа группы G, то тройка $(G, H, \Phi_\pi(G))$ не является 3-сопряженной системой. При этом утверждения 3.1–3.4 имеют место при $k = 3$. В частности, $\Phi_\pi(G) \cap N = 1$ и N — точный вполне приводимый $\Phi_\pi(M)$-модуль над полем F_p из p элементов ввиду утверждений 3.1 и 3.3. Так как группа G является S_4-свободной, подгруппа $\Phi_\pi(M)N$ также S_4-свободна. Тогда по лемме 2.7 найдутся элементы $n_1, n_2 \in N$, для которых $C_{\Phi_\pi(M)}(n_1) \cap C_{\Phi_\pi(M)}(n_2) = 1$. Отсюда в силу леммы 2.6 имеем

$$\Phi_\pi(M) \cap (\Phi_\pi(M))^{n_1} \cap (\Phi_\pi(M))^{n_2} = 1.$$

Тогда тройка $(\Phi_\pi(M)N, \Phi_\pi(M), 1)$ является 3-сопряженной системой, что противоречит утверждению 3.4 минимального контрпримера. Утверждение 2 теоремы доказано.

3. Как и в утверждении 2, достаточно показать, что подгруппа $\Phi_\pi(M)N$ является S_4-свободной. Предположим, что это не так, т. е. в $\Phi_\pi(M)N$ существует секция A/B, изоморфная S_4. Так как N — π'-группа, ввиду леммы 2.1 $O_\pi(M)$ —

холлова π-подгруппа группы $\Phi_\pi(M)N$ и, кроме того, группа $\Phi_\pi(M)N/O_\pi(M)N$ нильпотентна. Пусть F — холлова π'-подгруппа группы $\Phi_\pi(M)N$. Тогда в силу изоморфизма

$$\Phi_\pi(M)N/O_\pi(M)N = FO_\pi(M)N/O_\pi(M)N \cong F/F\cap O_\pi(M)N$$
$$= F/(F\cap O_\pi(M))N = F/N$$

получаем, что $F \in \mathfrak{N}^2$. Согласно теореме Холла найдется элемент $h \in \Phi_\pi(M)N$ такой, что $F^h \cap A$ — холлова π'-подгруппа группы A. Так как A/B изоморфна S_4, то $A = (F^h \cap A)B$, откуда имеем

$$A/B = (F^h\cap A)B/B \cong (F^h\cap A)/(F^h\cap A)\cap B = (F^h\cap A)/(F^h\cap B),$$

т. е. секция A/B принадлежит $\mathfrak{N}^2$; противоречие с тем, что $A/B \cong S_4$. Следовательно, подгруппа $\Phi_\pi(M)N$ является S_4-свободной.

Тогда по лемме 2.7 найдутся элементы $n_1, n_2 \in N$, для которых $C_{\Phi_\pi(M)}(n_1)\cap C_{\Phi_\pi(M)}(n_2) = 1$. Ввиду леммы 2.6 имеем $\Phi_\pi(M)\cap(\Phi_\pi(M))^{n_1}\cap(\Phi_\pi(M))^{n_2} = 1$. Тогда тройка $(\Phi_\pi(M)N, \Phi_\pi(M), 1)$ является 3-сопряженной системой, что противоречит утверждению 3.4 минимального контрпримера. Теорема доказана.

5. Пример и следствия

Пример 5.1. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует группа G, в которой π-префраттиниевы подгруппы не являются $\mathfrak{F}$-префраттиниевыми.

Предположим, что существует насыщенная формация $\mathfrak{F}$, для которой в любой группе G множество всех π-префраттиниевых подгрупп совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп.

Допустим, что $\pi(\mathfrak{F})\cap\pi' \neq \varnothing$. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{F})\cap\pi'$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, группа Z_p порядка p принадлежит $\mathfrak{F}$. Но тогда $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа группы Z_p совпадает с Z_p, а ее π-префраттиниева подгруппа единична; противоречие с выбором $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F})\cap\pi' = \varnothing$, а значит, $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{S}_\pi$ — формация всех разрешимых π-групп. Тогда найдется π-группа, не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{F}$. Тогда группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N такой, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, N не содержится в $\Phi(G)$. Тогда максимальная подгруппа группы G, не содержащая N, является ее $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой, в то время как π-префраттиниева подгруппа группы G совпадает с группой G; противоречие. Следовательно, справедливо равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть p и q — простые числа, причем $q \notin \pi$, а число p принадлежит π. Пусть U — точный неприводимый $F_q[Z_p]$-модуль над полем F_q, состоящим из q элементов. Рассмотрим группу $H = [U]Z_p$. Поскольку $O_p(H) = 1$ и U — единственная минимальная нормальная подгруппа группы H, по теореме 10.3.B из [9] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V над полем F_p. Рассмотрим группу $D = [V]H = [V]([U]Z_p)$. Так как $C_D(V) = V$ и D/V не является π-группой, минимальная нормальная подгруппа V группы D не будет $\mathfrak{F}$-центральной в D. Поэтому Z_p — $\mathfrak{F}$-префраттиниева подгруппа группы D. В то же время $[V]Z_p$ является ее π-префраттиниевой подгруппой. Снова пришли к противоречию.

В случае, когда $\pi = \varnothing$, из утверждения 3 теоремы имеем

Следствие 5.1 [2]. *Для любой конечной разрешимой группы G и любой ее префраттиниевой подгруппы в G найдутся элементы x и y такие, что $H \cap H^x \cap H^y = \Phi(G)$.*

Следствие 5.2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Тогда для любой конечной разрешимой группы G и любой ее π-префраттиниевой подгруппы H справедливы следующие утверждения:*

1) $|H| \leq \sqrt[4]{|G|^3|\Phi_\pi(G)|}$;

2) $|H/\Phi_\pi(G)| \leq |G:H|^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches A., Cossey J., Kamornikov S. F., Meng H.* On two questions from the Kourovka notebook // J. Algebra. 2018. V. 499. P. 438–449.
2. *Kamornikov S. F.* Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups // Int. J. Group Theory. 2017. V. 6, N 2. P. 1–5.
3. *Каморников С. Ф.* Об одной характеризации подгруппы Гашюца конечной разрешимой группы // Фундам. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 6. С. 65–75.
4. *Passman D. S.* Groups with normal solvable Hall p'-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123, N 1. P. 99–111.
5. *Зенков В. И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундам. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
6. *Dolfi S.* Intersections of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 2005. V. 37, N 1. P. 61–66.
7. *Dolfi S.* Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 360, N 1. P. 135–152.
8. *Vdovin E. P.* Regular orbits of solvable linear p'-groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. V. 4, N . P. 345–360.
9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
10. *Gaschütz W.* Praefrattinigruppen // Arch. Math. 1962. V. 13, N 3. P. 418–426.
11. *Hawkes T. O.* Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Intern. Conf. theory of groups (Austral. Nat. Univ., Canberra, 1965). New York, 1967. P. 145–150.
12. *Kurzweil H.* Die Praefrattinigruppe im Intervall eines Untergruppenverbandes // Arch. Math. 1989. Bd 53. S. 235–244.
13. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
14. *Каморников С. Ф.* О префраттиниевых подгруппах конечных разрешимых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1310–1318.
15. *Каморников С. Ф., Шеметков Л. А.* Проекторы разрешимых конечных групп: редукция к подгруппам префраттиниева типа // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 3. С. 306–309.

Поступила в редакцию 3 мая 2018 г.
После доработки 22 июня 2018 г.
Принята к публикации 17 августа 2018 г.

Йи Сяолан (Yi Xiaolan)
Departament of Mathematics,
Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China
yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Сяо Линлин (Xiao Lingling)
Departament of Mathematics,
Zhejiang Sci-Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China