Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. Васильев (Гомель, Беларусь)[1], В. И. Мурашко (Гомель, Беларусь)[2]

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные терминология и обозначения из теории групп и графов, которые, если необходимо, могут быть найдены в [4, 10, 11]. Напомним, что через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G; группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все максимальные подгруппы которой нильпотентны; (p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G, для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу; Syl_pG — множество всех силовских p-подгрупп группы G.

В настоящее время имеется значительное число работ, в которых каждой конечной группе ставится в соответствие определенный граф и исследуется связь свойств графа со свойствами группы (см., например, [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14]). Это направление восходит к работе [7] А. Кэли 1878 года. Введённый им граф группы, называемый в настоящее время графом Кэли, имеет большое число приложений. Другой яркой иллюстрацией этого направления является проблема П. Эрдеша о графах некоммутативности, решенная Б. Нейманом [13] в 1976 году.

Определение 1. (1) Функцию Γ будем называть арифметической графовой функцией, если она каждой группе G ставит в соответствие граф $\Gamma(G)$ такой, что $V(\Gamma(G))$ — подмножество множества делителей $|G|$ и $\Gamma(1) = \emptyset$. Граф $\Gamma(G)$ назовем арифметическим.

(2) Графом $\Gamma(\mathfrak{X})$ класса групп $\mathfrak{X}$ будем называть $\bigcup\limits_{G\in\mathfrak{X}} \Gamma(G)$.

Примерами арифметических графов являются:

(1) Граф Хоукса $\Gamma_H(G)$ [12]:

$$V(\Gamma_H(G)) = \pi(G) \text{ и } E(\Gamma_H(G)) = \{(p, q) \mid q \in \pi(G/\mathrm{O}_{p',p}(G))\}.$$

(2) Силовский граф $\Gamma_s(G)$ [9]: $V(\Gamma_s(G)) = \pi(G)$ и

$$E(\Gamma_s(G)) = \{(p, q) \mid q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P)),\ P \in Syl_pG\}.$$

(3) N-критический граф $\Gamma_{Nc}(G)$: $V(\Gamma_{Nc}(G)) = \pi(G)$ и

$$E(\Gamma_{Nc}(G)) = \{(p, q) \mid G \text{ содержит } (p, q)\text{-подгруппу Шмидта}\}.$$

(4) Граф простых чисел или граф Грюнберга-Кегеля $\Gamma_p(G)$ [2, 14]: $V(\Gamma_p(G)) = \pi(G)$

$$E(\Gamma_p(G)) = \{\{p, q\} \mid G \text{ содержит элемент порядка } pq\}.$$

Следуя работе [1], скажем, что группа G называется распознаваемой по графу простых чисел, если из $\Gamma_p(G) = \Gamma_p(H)$ всегда следует $H \simeq G$ для любой группы H. Как отмечено в работе [1], существует бесконечное множество групп с нетривиальным разрешимым радикалом и одинаковым графом простых чисел. Поэтому, проблема распознавания групп по графу простых чисел представляет интерес только для простых или почти простых групп. Отметим, что граф простых чисел применяется при решении известной проблемы распознавания групп по множеству порядков их элементов, см., например, [3]. В данной работе мы будем рассматривать проблему распознавания групп по графу с точностью до класса групп в смысле следующего определения.

 Получено 25.12.2017. УДК 512.542.

[1]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины. E-mail: formation56@mail.ru.

[2]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины. E-mail: mvimath@yandex.ru.

Определение 2. Пусть Γ — графовая функция и $\mathfrak{X}$ — класс групп. Класс $\mathfrak{X}$ назовем распознаваемым графовой функцией Γ, если из $G_1 \in \mathfrak{X}$ и $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$ всегда следует, что $G_2 \in \mathfrak{X}$.

Формации, распознающиеся Γ_H, описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $\sigma(p) = \{q \,|\, (p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))\}$. Формация $\mathfrak{F}$ распознаётся Γ_H тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \emptyset$ в противном случае.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если всякая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Теорема 2. *Формация $\mathfrak{F}$ распознаётся Γ_{Nc} тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная формация с условием Шеметкова.*

Следующая теорема устанавливает свойства наследственных формаций $\mathfrak{F}$, распознающихся $\mathfrak{F}_{\Gamma_s}$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ распознаётся Γ_s, то выполняются следующие утверждения:*
(a) $\Gamma_s(\mathfrak{F})$ — неориентированный граф.
(b) $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация с условием Шеметкова.

Напомним [8], что локальная формация $\mathfrak{F} = LF(F)$, где $F(p) = \mathfrak{G}_{\pi(F(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $F(p) = \emptyset$ в противном случае, называется покрывающей формацией разрешимых групп, если $p \in \pi(F(p))$ и $p \in \pi(F(q))$ всегда влечет $q \in \pi(F(p))$ для всех $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$. Как было показано в [8], всякая такая формация $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая всякую разрешимую группу G, все нормализаторы силовских подгрупп которой принадлежат $\mathfrak{F}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп такой, что $\Gamma_s(\mathfrak{X})$ — неориентированный граф. Тогда:*
(a) $\mathfrak{X}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$ — наследственная формация;
(b) $\mathfrak{X}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$ — покрывающая формация разрешимых групп.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ распознаётся Γ_s, то выполняются следующие утверждения:*
(a) $\Gamma_s(\mathfrak{F})$ неориентирован.
(b) $\mathfrak{F}$ — разрешимо насыщенная формация с условием Шеметкова.
(c) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — покрывающая формация в классе разрешимых групп.

Напомним, что группа называется дисперсивной, если найдётся линейный порядок ϕ на $\pi(G)$ такой, что если $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, причем $p_i \leq_\phi p_j$ для $i < j$, то G имеет нормальные холловы $\{p_1, \dots, p_i\}$-подгруппы для всех $i \leq n$. Хоукс [12] показал, что если $\Gamma_H(G)$ не имеет циклов, то группа G дисперсивна.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Если $\pi_1 \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $V(\Gamma_H(\mathfrak{F})) = \pi_1 \cup \pi_2$ и граф $\Gamma_H(\mathfrak{F})$ не имеет ребер, выходящих из π_1 в π_2, то всякая $\mathfrak{F}$-группа имеет нормальную холлову π_1-подгруппу.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, $V(\Gamma_H(\mathfrak{F})) = \pi_1 \cup \pi_2$, где $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ и между π_1 и π_2 нет ребер в $\Gamma_H(\mathfrak{F})$. Тогда всякая группа из $\mathfrak{F}$ — прямое произведение холловых π_1-подгруппы и π_2-подгруппы.*

Теорема 6. *Пусть A, B и C — подгруппы разрешимой группы G, чьи индексы попарно взаимно просты в G. Тогда $\Gamma_H(G) = \Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma_H(C)$.*

Отметим, что условие попарной взаимной простоты индексов не может быть опущено в теореме 6. Рассмотрим симметрическую группу степени 4. Она является произведением любых двух из следующих подгрупп: силовской 2-подгруппы, знакопеременной группы степени 4 и подгруппы, изоморфной симметрической группе степени 3. Объединение их графов Хоукса равно $\{(2,3),(3,2)\}$. Однако, графом Хоукса симметрической группы степени 4 является $\{(2,3),(3,2),(2,2)\}$.

Следствие 3. *Пусть формация $\mathfrak{F}$ распознаётся Γ_H и группа G содержит три разрешимые $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C, чьи индексы попарно взаимно просты. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Из следствия 3 вытекает известная теорема Кегеля [4, с. 46]:

Следствие 4. *Если группа содержит три нильпотентные подгруппы с попарно взаимнопростыми индексами, то она нильпотентна.*

Следующий результат получен нами путем непосредственного нахождения N-критических графов минимальных простых групп.

Теорема 7. *Пусть G — группа. Если верно хотя бы одно из следующих утверждений, то G разрешима.*
(a) $\Gamma_{Nc}(G)$ не содержит циклов.
(b) Всякий цикл $\Gamma_{Nc}(G)$ не содержит ребра $(2,q)$, для любого $q \in \pi(2^p-1)$ и простого p.
(c) Всякий цикл $\Gamma_{Nc}(G)$ имеет длину, большую 3.

Отметим, что $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_H(G)$ для любой группы G. Усилением упомянутой выше теоремы Хоукса является следующая

Теорема 8. *Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не имеет циклов, то группа G дисперсивна.*

Литература

1. *Заварницин А. В.* О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390—408.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Математический сборник. 1989. Т. 180, № 6. С. 787—797.
3. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651—666.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
5. *Ballester-Bolinches A., Cossey J.* Graphs, partitions and classes of groups // Monatsh. Math. 2012. Vol. 166, № 3–4. P. 309—318.
6. *Ballester-Bolinches A., Cossey J., Esteban-Romero R.* Graphs and classes of finite groups // Note Mat. 2013. Vol. 33, № 1. P. 89—94.
7. *Cayley A.* Desiderata and suggestions: No. 2. The Theory of groups: graphical representation // Amer. J. Math. 1878. Vol. 1 (2). P. 174—176.
8. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G.* Saturated formations closed under Sylow normalizers // Comm. Algebra. 2005. Vol. 33. P. 2801—2805.
9. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G.* Lattice formations and Sylow normalizers: a conjecture // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell Universita di Modena e Reggio Emilia. 2007. № 55. P. 107—112.
10. *Diestel R.* Graph theory. Third edition. Springer-Verlag, 2005. 423 p.
11. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
12. *Hawkes T.* On the class of the Sylow tower groups // Math. Z. 1968. № 105. P. 393—398.
13. *Neumann B.* A problem of Paul Erdös on groups // J. Austral. Math. Soc. 1976. № 21. P. 467—472.
14. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. № 69. P. 487—513.