**Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов»,
посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук
Ивановского государственного университета**

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

К ПРОБЛЕМЕ АЙЗЕКСА И ГОНГА О НОРМАЛИЗАТОРНОМ СВОЙСТВЕ КОРАДИКАЛОВ СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С. Ф. Каморников (Гомель, Беларусь)[1]

В данной работе рассматриваются только конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, т.е. класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Тогда подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G, равная пересечению всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.

В [3] Гонг и Айзекс, исследуя свойства корадикалов конечных групп, показали, что если подгруппа M группы G нормализует нильпотентный (соответственно разрешимый) корадикал каждой несубнормальной подгруппы группы G, то M нормализует нильпотентный (соответственно разрешимый) корадикал любой подгруппы группы G. В [3] Гонг и Айзекс предположили, что если некоторая подгруппа группы нормализует сверхразрешимый корадикал каждой несубнормальной подгруппы этой группы, то она нормализует сверхразрешимый корадикал любой ее подгруппы.

В [1] получен положительный ответ на сформулированный вопрос. Более того, здесь показано, что аналогичное утверждение имеет место для любой наследственной насыщенной формации, имеющей полную характеристику.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если подгруппа M группы G нормализует $\mathfrak{F}$-корадикал $H^{\mathfrak{F}}$ каждой несубнормальной подгруппы H группы G, то M нормализует $\mathfrak{F}$-корадикал любой подгруппы группы G.*

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $H^{\mathfrak{F}}$ каждой несубнормальной подгруппы H группы G нормален в G, то $\mathfrak{F}$-корадикал любой подгруппы группы G нормален в G.*

Группа G из заключения следствия устроена достаточно просто. В частности, она имеет нильпотентный $\mathfrak{F}$-корадикал. Точное ее строение приводится в данной работе.

В теории классов групп предложенная Виландтом идея субнормальности как транзитивного замыкания нормальности нашла воплощение в понятиях $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа и $\mathfrak{F}$-субнормальная в смысле Кегеля подгруппа.

Концепция $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы предложена Картером и Хоуксом [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_n = G$$

такая, что $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_{\mathfrak{F}}(G)$).

Простая проверка показывает, что, если $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то любая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа группы G является субнормальной. Более того, для разрешимой группы G справедливо равенство $sn_{\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$.

 Получено 18.12.2017. УДК 512.542.

[1]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины. E-mail: sfkamornikov@mail.ru.

Другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности, развивающее идею субнормальности, предложено Кегелем [4]. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, то подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (множество всех K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G обозначается $sn_{K-\mathfrak{F}}(G)$).

Проверка показывает, что для любой группы G справедливо равенство $sn_{K-\mathfrak{N}}(G) = sn(G)$. В связи с этим по аналогии с приведенной теоремой для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей все нильпотентные группы, возникает предположение, что если $\mathfrak{F}$-корадикал $H^{\mathfrak{F}}$ каждой не $\mathfrak{F}$-субнормальной (или каждой не $\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля) подгруппы H группы G нормален в G, то $\mathfrak{F}$-корадикал любой подгруппы группы G нормален в G. Однако это не так. Соответствующие примеры приводятся в данной работе.

Литература

1. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Meng H.* Normalisers of residuals of finite groups // Arch. Math. 2017. Vol. 109, № 4. P. 305—310.
2. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. Vol. 5, № 2. P. 175—202.
3. *Gong L., Isaacs I. M.* Normalizers of nilpotent residuals // Arch. Math. 2017. Vol. 108, № 1. P. 1—7.
4. *Kegel O. H.* Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Vol. 30, № 3. P. 225—228.