

## О конечных группах с тремя заданными подгруппами

А. Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т. И. ВАСИЛЬЕВА, К. Л. ПАРФЕНКОВ

Рассматриваются только конечные группы. Пусть группа  $G$  имеет три подгруппы  $A$ ,  $B$  и  $C$ , чьи индексы попарно взаимно просты в  $G$ . Хорошо известно, что если  $A$ ,  $B$ , и  $C$  абелевы, то и сама  $G$  абелева. Как установили Виландт и Кегель, группа  $G$  сохраняет свойство разрешимости (нильпотентности) в случае разрешимости (соответственно nilьпотентности) подгрупп  $A$ ,  $B$  и  $C$ . С другой стороны, сверхразрешимость  $A$ ,  $B$  и  $C$  уже не влечет в общем случае сверхразрешимость самой группы  $G$ . В работах [1, 2] был найден ряд достаточных условий сверхразрешимости группы  $G$  со сверхразрешимыми подгруппами  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Проблема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустой класс групп (формация, класс Фиттинга, класс Шунка). Найти строение группы  $G$ , имеющей три  $\mathfrak{F}$ -подгруппы (сверхразрешимые подгруппы), чьи индексы попарно взаимно просты в  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустая формация. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$ , если либо  $H = G$ , либо существует максимальная цепь подгрупп  $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$  такая, что  $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$  для  $i = 1, \dots, n$ .

В [3] был введен класс групп  $w\mathfrak{F} = (G | \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$  и всякая силовская подгруппа из  $G$  является  $\mathfrak{F}$ -субнормальной в  $G$ . В [3, 4] установлены свойства класса  $w\mathfrak{F}$ . В [5] исследован класс  $w\mathfrak{U}$  для формации  $\mathfrak{U}$  всех сверхразрешимых групп.

**Теорема.** Если  $\mathfrak{F}$  — наследственная насыщенная формация разрешимых групп и группа  $G$  имеет три  $\mathfrak{F}$ -подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в  $G$ , то  $G$  является  $w\mathfrak{F}$ -группой.

**Следствие 1.** Если метанильпотентная группа  $G$  имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в  $G$ , то  $G$  сверхразрешима.

**Следствие 2 [1].** Если группа  $G$  имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в  $G$ , и коммутант  $G'$  nilьпотентен, то  $G$  сверхразрешима.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Flowers N., Wakefield T. P., On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices // Arch. Math., V.95, 4, 2010, 309–315.
- [2] Ballester-Bolinchas A., Ezquerro L. M., Triple factorizations and supersolvability of finite groups // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2015, DOI:10.1017/S0013091515 000231.
- [3] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ, выпуск 4(9), 2011, 86–91.
- [4] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С., Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн., Т.57, 2, 2016, 259–275.
- [5] Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н., О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн., Т.51, 6, 2010, 1270–1281.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

E-mail: [formation56@mail.ru](mailto:formation56@mail.ru), [tivasilyeva@mail.ru](mailto:tivasilyeva@mail.ru), [kirill.parfenkov@gmail.com](mailto:kirill.parfenkov@gmail.com)