

О ядре системного нормализатора конечной разрешимой группы

С. Ф. КАМОРНИКОВ

Рассматриваются только конечные разрешимые группы.

В "Коуровской тетради" под номером 17.39 Л.А. Шеметковым и А.Ф. Васильевым сформулирована следующая задача:

Существует ли натуральное число n такое, что гиперцентр каждой конечной разрешимой группы совпадает с пересечением n системных нормализаторов этой группы? Каково наименьшее число n с этим свойством?

В данной работе эта задача решается в случае, когда группа имеет тривиальную подгруппу Фраттини.

Теорема. Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G . Если $\Phi(G) = 1$, то найдутся такие элементы $x, y \in G$, что $D \cap D^x \cap D^y = Z_\infty(G)$.

Напомним, что нормальная подгруппа N группы G называется *гиперцентральной*, если любой главный фактор группы G , расположенный ниже N , является центральным в G . Произведение гиперцентральных нормальных подгрупп группы G является ее гиперцентральной нормальной подгруппой. Поэтому группа G обладает единственной максимальной нормальной гиперцентральной подгруппой, которая называется *гиперцентром* и обозначается $Z_\infty(G)$.

Отметим, что в конечной разрешимой группе G , обладающей единичной подгруппой Фраттини, всегда имеет место равенство $Z_\infty(G) = Z(G)$. Поэтому справедливо

Следствие 1. Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G . Если $\Phi(G) = 1$, то найдутся такие элементы $x, y \in G$, что $D \cap D^x \cap D^y = Z(G)$.

Следствие 2. Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G . Если $\Phi(G) = 1$, то справедливы неравенства $|D| \leq \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |Z(G)|}$ и $|D/Z(G)| \leq |G : D|^2$.

Следствие 3. Пусть D — системный нормализатор конечной разрешимой группы G . Если $\Phi(G) = 1$ и $Z(G) = 1$, то справедливы неравенства $|D| \leq \sqrt[3]{|G|^2}$ и $|D| \leq |G : D|^2$.

В случае, когда подгруппа Фраттини конечной разрешимой группы не тривиальна, вопрос 17.39 остается открытым.

Международный университет "МИТСО", Гомель, Беларусь

E-mail: sfkamornikov@mail.ru