Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 4

УДК 517.945.7 *МАТЕМАТИКА*

С. Я. ЯКУБОВ

РАЗРЕШИМОСТЬ В «ЦЕЛОМ» ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 V 1970)

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейной гиперболической системы

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_k}=f(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in[0,T]\times R^n,\ u(0,x)=u_0(x), \tag{1}$$

где $u(t,x)=(u_1(t,x),\ldots,u_N(t,x))$ — искомая вектор-функция, A_k — вещественная диагональная матрица порядка $N\times N$, $f(t,x\,u)$, $u_0(x)$ — заданные вектор-функции. Разрешимость в «малой» по t для квазилинейных гиперболических систем первого порядка исследована в ряде работ (см., например, ([1], [2])). Разрешимость в «целом» в классе монотонных нелинейностей исследована Ф. Браудером ([3]). В данной статье показывается, что в классе периодических по пространственным переменным функций задача (1) разрешима в «целом» лишь при односторонних оценках на нелинейные части.

Прежде чем приступить к изложению полученных результатов, сформулируем одну теорему разрешимости в «целом» задачи Коши для квазилинейного эволюционного уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Скажем, что оператор $f(u)$, действующий из банахова пространства G в банахово пространство E, имеет в точке $u_0\in G$ G-расширенную производную Фреше ($\bar G$ — банахово пространство с более слабой топологией ($G\subset\bar G$) и $\bar G=G$), если он имеет производную Фреше, определенную в $\bar G$ ([4]).

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$u'(t)=A(t)u(t)+f(t,u(t)),\quad u(0)=u_0. \tag{2}$$

Говорят, что задача Коши для уравнения $u'(t)=A(t)u(t)$ равномерно корректна ([3]), если:

а) при каждом $s\in[0,T)$ и $u_0\in D(A)=D(A(t))$ существует единственная функция $u(t,s)$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению на $[s,T]$ (называемая решением уравнения) и условию $u(s,s)=u_0$;

б) функция $u(t,s)$ и ее производная $u_t'(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных в T_Δ: $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$;

в) решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из сходимости $u_{0,n}\in D(A)$ к нулю следует равномерная по t и s в T_Δ сходимость к нулю соответствующих решений $u_n(t,s)$.

В дальнейшем будет идти речь только о таких уравнениях вида (2), для которых линейная часть равномерно корректна.

В ряде работ автора ([4], [6], [7]) показано, как при наличии априорной оценки $\|A(t)u(t)\|\leqslant c$ для решения задачи (2)—(3) из локальной теоремы существования получается и нелокальная теорема.

Схема получения априорных оценок, конечно, меняется в зависимости от типа уравнения или задачи, но для всех этих схем общим является то, что сперва устанавливается слабая априорная оценка, а затем при наличии этой оценки получается и сильная априорная оценка. Так как схема получения сильных априорных оценок из слабых является одинаковой, то сформулируем ее в виде отдельной теоремы, в дальнейшем покажем, как эти слабые априорные оценки получаются в конкретных ситуациях.

Теорема 1. *Пусть:*

1°. *Замкнутый линейный оператор* $A(t)$ $(t \in [0, T])$ *имеет не зависящую от* t *всюду плотную в* E *область определения* $D(A(t)) = D(A)$ *и ограниченный обратный* $A^{-1}(t)$; *оператор* $A(t)$ *сильно непрерывно дифференцируем на* $D(A)$; *задача Коши для уравнения* $u'(t) = A(t)u(t)$ *равномерно корректна.*

2°. *Оператор* $f(t, u)$ *действует из* $[0, T] \times E(A)$ * *в* E, *имеет непрерывную производную* $D_t f(t, u)$ *и сильно непрерывную* E-*расширенную производную Фреше* $D_u f(t, u)$, *которые удовлетворяют по* u *условию Липшица в каждом шаре пространства* $E(A)$; *для всех* $u \in D(A)$, *для которых* $\|u\|_{E_1} \leqslant R$, *где* $\|u\|_{E_1} \leqslant c\|A_{(0)}u\|$, *имеют место неравенства*

$$\|f_t'(t; u)\| \leqslant c(R)(1 + \|A_{(0)}u\|); \quad \|f_u'(t, u)\|_{B(E)} \leqslant c(R).$$

3°. $u_0 \in D(A)$; *для решения задачи* (2) *имеет место априорная оценка* $\|u(t)\|_{E_1} \leqslant c.$

Тогда задача Коши (2) *имеет единственное решение*

$$u(t) \in C^1([0, T]; E) \cap C([0, T]; E(A)).$$

Теперь установим некоторые вспомогательные факты.

Пусть Ω — измеримое множество в R^n (конечное или бесконечное). Рассмотрим множество $M_\infty(\Omega)$, состоящее из всех функций $u(x)$, которые, начиная с некоторого $p_u < \infty$, принадлежат $L_p(\Omega)$ $(p \geqslant p_u)$ и у которых нормы $\|u\|_{L_p(\Omega)}$ равномерно ограничены относительно $p \in (p_u, \infty)$.

Очевидно множество $M_\infty(\Omega)$ является линейным многообразием, и оно плотно в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, так как финитные непрерывные функции принадлежат $M_\infty(\Omega)$. Обозначим через $L_\infty(\Omega)$ банахово пространство измеримых и почти везде в Ω ограниченных функций.

Лемма 1. $M_\infty(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$.

Лемма 2. *Если* Ω — *ограниченное множество, то* $M_\infty(\Omega) = L_\infty(\Omega)$.

Через $K^n = \{x \in R^n;\ x_k^0 \leqslant x_k \leqslant x_k^0 + l_k\}$ обозначим некоторый параллелепипед в R^n, а через $C_\Pi[K^n]$ — пространство периодических непрерывных функций, параллелепипед периодов которых совпадает с K^n. При фиксированном $a \in R^n$ семейство операторов

$$[T(t)u](x) = u(x - at)$$

образует сильно непрерывную группу изометрических операторов, как в пространстве $C_\Pi[K^n]$, так и в $L_p(K^n)$. Для этого предварительно следует расширить функции из $C_\Pi[K^n]$ или $L_p(K^n)$ периодически на все пространство R^n. Легко заметить, что между двумя производящими операторами A_c и A_p, соответствующими пространствами $C_\Pi[K^n]$ и $L_p(K^n)$, существует следующее соотношение: $A_c \subset A_p$. Также очевидно, что дифференциальный оператор A, порожденный дифференциальным выражением

$$Au = -\sum_{k=1}^{n} a_k D_k u(x)$$

и областью определения $D(A) = C_\Pi^1[K^n]$ является сужением производящего оператора A_c. В отличие от одномерного случая (8) в области

* $E(A) = \{u \in D(A);\ \|u\|_A = A\|(0)u\|\}$.

определения производящего оператора A_c содержатся и не дифференцируемые функции. Например, если $u(x) \in C_{\text{п}}[K^1]$, a_1, a_2 — целые числа и $l_2 = kl_1$, то $v(x) = u(a_2x_1 - a_1x_2) \in D(A_c)$. Действительно, из

$$[T(t)v](x) = u(a_2(x_1 - a_1t) - a_1(x_2 - a_2t)) = v(x)$$

вытекает, что $v(x) \in D(A_c)$ и $A_cv = 0$.

Для задачи (1) доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Функции $f_i(t, x, u)$ $(i = 1, \ldots, N)$ непрерывны вместе со своими производными по t, x, u в области $\{t \in [0, T], x \in R^n, u \in (-\infty, +\infty)\}$, причем производные f_t' и f_u' удовлетворяют по u локальному условию Липшица.*

2°. *Функции $f_i(t, x, u)$ и $u_i^0(x)$ периодичны по всем пространственным переменным x_k, т. е. существуют числа l_k такие, что*

$$\&_i(t, \ldots, x_k, \ldots u) = f_i(t, \ldots, x_k + l_k, \ldots u);$$

$$u_i^0(\ldots, x_k, \ldots,) = u_i^0(\ldots, x_k + l_k, \ldots).$$

3°. $f_i(t, x, u)\, u_i \leqslant c(1 + |u_i|^2)$ $(i = 1, \ldots, N)$; $u_0(x) \in (C_{\text{п}}^1[K^n])^N$.

Тогда задача (1) *имеет единственное решение*

$$u(t, x) \in (C_{\text{п}}^1[[0, T] \times K^n])^N$$

и для двух решений $u(t, x)$, $v(t, x)$, соответствующих начальным данным $u(x), v(x) \in S(R; (C_{\text{п}}^1[K^n])^N)$ имеет место оценка

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t, x) - v(t, x)\|_{(C^1[K^n])^N} \leqslant c(R) \|u(x) - v(x)\|_{(C^1[K^n])^N}.$$

Доказательство. Из вышесказанного вытекает, что решение задачи (1), принадлежащее пространству $(C_{\text{п}}^1[[0, T] \times K^n])^N$, является решением абстрактной задачи Коши

$$u'(t) + A_cu(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0, \tag{3}$$

в пространстве $(C_{\text{п}}[K^n])^N$, где $A_c = \begin{pmatrix} A_c^1 \ldots 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ 0 \ldots A_c^N \end{pmatrix}$, $A_c^l u = \sum\limits_{k=1}^n a_k^l D_k u(x)$

$(l = 1, \ldots, N)$; $D(A_c^l) = C_{\text{п}}^1[K^n]$. Обратно, если решение задачи Коши (3) имеет непрерывную производную по x, то оно является также и решением задачи (1), принадлежащим пространству $(C_{\text{п}}^1[[0, T] \times K^n])^N$. Очевидно, оператор

$$f(t, u) = f(t, x, u(x))$$

действует из $(C_{\text{п}}[K^n])^N$ в себя, имеет непрерывные производные $f_t'(t, u)$, $f_u'(t, u)$, причем они удовлетворяют локальному условию Липшица. Значит, задача (3) в пространстве $(C_{\text{п}}[K^n])^N$ имеет локальное по t решение $u(t)$. Обозначим через Γu градиент квадрата нормы в $L_p^N(K^n)$. Известно, что $\Gamma u = (2u_i(x)\,|u_i(x)|^{p-2} \|u_i\|_{L_p}^{2-p})_1^n$. Умножим (3) на $\Gamma u(t)$: $(u'(t), \Gamma u(t)) + (A_cu(t), \Gamma u(t)) = (f(t, u(t)), \Gamma u(t))$. Так как A_p является производящим оператором сжимающей группы в $L_p^N(K^n)$ и A_c является его сужением, то в силу результатов [9, 10] $(A_cu(t), \Gamma u(t)) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_p^N}^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^N \|u_i(t)\|_{L_p}^{2-p} \int\limits_{K^n} f_i(t, x, u(t, x))\, u_i(t, x)\, |u_i(t, x)|^{p-2} dx \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{i=1}^N \|u_i(t)\|_{L_p}^{2-p} \int\limits_{K^n} (1 + |u_i(t, x)|^2)\, |u_i(t, x)|^{p-2} dx \leqslant c(1 + \|u(t)\|_{L_p^N}^2).$$

Значит, $\|u(t)\|_{L_p^{2N}} \leqslant c(1 + \|u(0)\|_{L_p^{2N}}) \leqslant c(1 + \|u_0\|_{C^{2N}})$, откуда в силу леммы 1 следует, что $\|u(t)\|_{C^N} \leqslant c$. Итак, имеет место слабая априорная оценка для решения абстрактной задачи (3). Но, так как операторы, порождаемые функциями $f_t'(t, x, u(x))$, $f_u'(t, x, u(x))$, являются ограниченными в $(C_\Pi[K^n])^N$, то

$$\|f_t'(t, u)\|_{C^N} \leqslant c(R), \ \|f_u'(t, u)\|_{C^N \to C^N} \leqslant c(R),$$

как только $\|u\|_{C^N} \leqslant R$. Значит, в силу теоремы 1 задача Коши (3) разрешима в «целом».

В заключение отметим, что нелинейность вида $f(u) = |u|^p u$, рассматриваемая в работе ([11]), удовлетворяет и нашим условиям. Но в этой работе, а также в ([3]), линейная часть уравнения (1) является общей симметрической гиперболической системой первого порядка.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
7 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М., 1961. [2] R. Courant, Comm. on Pure and Appl. Math., 14, 257 (1961). [3] F. Browder, Ann. Math., 82, 1, 51 (1965). [4] С. Я. Якубов, Докл. АН АзербССР, 22, 8, 8 (1966). [5] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. [6] С. Я. Якубов, Тр. Московск. матем. общ., 23 (1970). [7] С. Я. Якубов, Функциональный анализ и его приложения, 4, 3 (1970). [8] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и подгруппы, М., 1962. [9] G. Lummer, R. S. Phillips, Pacific J. Math., 11, 2, 679 (1961). [10] В. Г. Мазья, П. Е. Соболевский, 17, 6, 151 (1962). [11] I. L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineares, Paris, 1969.