Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.542

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФОРМАЦИЙ

С. Ф. Каморников

Аннотация. Для формации, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов, описаны все критические группы с единичной подгруппой Фраттини. Построена новая серия таких формаций.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.610

Ключевые слова: конечная группа, формация, решеточная формация, формация, обладающая обобщенным свойством Виландта для корадикалов.

1. Введение

Говорят [1], что *формация $\mathfrak{F}$ индуцирует функтор Виландта на $\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах*, если $\langle A, B\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$ для любых двух $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп A и B каждой группы G. В [2] такая формация называется *формацией, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов*, или *GWP-формацией*. В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [3].

В [1] описаны основные свойства GWP-формаций. В частности, здесь доказано, что любая GWP-формация является наследственной решеточной формацией Фиттинга, и выделен достаточно широкий класс GWP-формаций. В связи с этим результатом в [2, с. 301] предлагается следующая задача: *найти точное описание формаций $\mathfrak{F}$, для которых $\mathfrak{F}$-корадикал любой группы, порожденной двумя $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, порождается $\mathfrak{F}$-корадикалами этих подгрупп.* При этом отмечается сложность и отдаленность перспектив ответа даже на следующий частный вопрос: является ли каждая наследственная насыщенная решеточная формация GWP-формацией?

На языке теории решеток этот вопрос равносилен следующему. Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная решеточная формация, то всегда ли отображение $f : H \mapsto H^{\mathfrak{F}}$ будет верхним решеточным эндоморфизмом решетки $sn_{\mathfrak{F}}(G)$ всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп для любой конечной группы G? Существование таких эндоморфизмов в решетке субнормальных подгрупп для широкого класса формаций доказано автором совместно с Л. А. Шеметковым в [4].

Как показывает практика рассмотрения частных случаев отмеченной задачи, при ее решении важную роль играют критические группы формации. В разрешимом классе нетривиальные критические группы GWP-формации исчерпываются только группами Шмидта. В классе всех групп спектр критических групп GWP-формации намного шире.

Первый шаг данной работы — классификация таких групп: в теореме 3.1 выделяются четыре типа критических групп (с единичной подгруппой Фраттини) GWP-формации $\mathfrak{F}$:

(I) — группы простого порядка;

(II) — простые неабелевы группы;

(III) — группы Шмидта;

(IV) — группы с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой.

Таким образом, классификация осуществляется по двум дихотомическим признакам, определяемым вопросами:

1) является группа простой или непростой;

2) обладает группа абелевым или неабелевым цоколем (группы типа (III) — это в точности непростые критические группы (с единичной подгруппой Фраттини) GWP-формации $\mathfrak{F}$, обладающие абелевым цоколем).

В разд. 2 описываются все GWP-формации, критические группы которых исчерпываются группами типа (I)–(III). Главная цель здесь — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией, у которой каждая критическая группа, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является либо простой группой, либо группой Шмидта, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) *существует разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{H} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$;*

3) $\mathfrak{M}$ *— наследственная формация, замкнутая относительно расширений.*

В разд. 3 строится серия GWP-формаций, обладающих критическими группами типа (IV).

2. Определения и используемые результаты

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [3]. При этом за информацией об $\mathfrak{F}$-субнормальных подгруппах и формациях, определяемых на их основе, отсылаем читателя к книгам [2, 5].

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из включения $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

Будем использовать следующие обозначения: P — множество всех простых чисел; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G; если $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп, то $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$; $s\mathfrak{F}$ — класс всех групп G, для которых $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$; $s_n\mathfrak{F}$ — класс всех групп G таких, что $G \trianglelefteq H \in \mathfrak{F}$.

Если $s\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ ($s_n\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$), то класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (соответственно *нормально наследственным*).

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H,$$

что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Класс $\mathfrak{M}$ называется *замкнутым относительно расширений*, если из $G/N \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{M}$ всегда следует $G \in \mathfrak{M}$. Простая проверка показывает, что если класс $\mathfrak{M}$ является наследственным, то $\mathfrak{M}$ замкнут относительно расширений тогда и только тогда, когда он состоит из всех тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{M}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой конечной группе.

Все наследственные насыщенные решеточные формации перечислены в [6]. Отметим, что описание разрешимых наследственных насыщенных решеточных формаций независимо получено в [7].

Если $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство классов групп, то через $\times_{i\in I}\mathfrak{X}_i$ обозначается класс всех групп, которые представимы в виде $H_{i_1} \times \dots \times H_{i_t}$, где $i_k \in I$, $H_{i_k} \in \mathfrak{X}_{i_k}$ для всех $k = 1, 2, \dots, t$. Через $\mathfrak{S}$ далее обозначается формация всех разрешимых групп (соответственно $\mathfrak{S}_\pi$ — формация всех разрешимых π-групп, где π — некоторое множество простых чисел).

Теорема 2.1 [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является решеточной, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) *существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$;*

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ *— наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$;*

4) *всякая нециклическая $\mathfrak{M}$-критическая группа G с единичной подгруппой Фраттини является примитивной группой с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N — циклическая примарная группа.*

Ввиду сформулированных ниже двух результатов теорема 2.1 ограничивает круг формаций, среди которых следует искать GWP-формации.

Теорема 2.2 [1]. *Любая GWP-формация является наследственной решеточной формацией Фиттинга.*

Теорема 2.3 [8]. *Любая GWP-формация насыщенная.*

Напомним, что *критической группой формации* $\mathfrak{F}$ (или $\mathfrak{F}$*-критической группой*) называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Критическая группа формации всех нильпотентных групп — это *группа Шмидта*.

Отметим, что из известного цикла работ Томпсона, описывающих конечные группы, у которых все локальные подгруппы разрешимы, вытекает, что если G — простая $\mathfrak{S}$-критическая группа, то она принадлежит следующему списку: $PSL_2(2^p)$, p — простое число; $PSL_2(3^p)$, p — нечетное простое число; $PSL_2(p)$, p — простое число, большее 3, для которого $p^2 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 5)$; $Sz(2^p)$, p — нечетное простое число; $PSL_3(3)$.

Пусть G — простая неабелева группа, $\pi = \pi(G)$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \operatorname{form}(G)$ — класс всех групп, являющихся расширением разрешимых π-групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных G. Проверка, проведенная в [5, с. 144–146], показывает, что если G — $\mathfrak{S}$-критическая группа, то $\mathfrak{M}$ — наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$, и, кроме того, всякая нециклическая $\mathfrak{M}$-критическая группа H с единичной подгруппой Фраттини является примитивной с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой $N = H^{\mathfrak{M}}$. При этом H/N — циклическая примарная группа (в частности, группа H может быть простой; например, если $G \simeq PSL_2(7)$, то простыми $\mathfrak{M}$-критическими группами являются группы $PSL_2(8)$ и $PSU_3(3)$). На основании теоремы 2.1 справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть G — $\mathfrak{S}$-критическая простая неабелева группа, $\pi = \pi(G)$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \operatorname{form}(G)$. Тогда $\mathfrak{M}$ — наследственная насыщенная решеточная формация.*

3. Критические группы GWP-формации

Напомним определение локальной формации. Функция

$$f : \mathrm{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией.*

Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется *f-центральным* (*f-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \operatorname{Aut}_G(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции* f, а f — *локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{G}_p$ — класс всех p-групп, f — формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда функция f называется:

(а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [3, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция f такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что на основании теоремы Гашюца — Любезедер — Шмидта [3, теорема IV.4.6] формация $\mathfrak{F}$ насыщенная тогда и только тогда, когда она локальна. Отсюда, в частности, следует, что для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует каноническое локальное определение f такое, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Далее без ссылок на теоремы 2.2 и 2.3 исходим из того, что любая GWP-формация $\mathfrak{F}$ всегда является наследственной и насыщенной, а значит, локальной. Поэтому найдется каноническое локальное определение f такое, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Более того, на основании утверждения IV.4.16 из [3] формация $f(p)$ наследственная для любого простого числа p.

Теорема 3.1. *Если $\mathfrak{F}$ — GWP-формация и G — $\mathfrak{F}$-критическая группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;*
2) *G — простая неабелева группа;*
3) *группа G является группой Шмидта;*
4) *G — примитивная группа с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой N и G/N — циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Группа G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку $\Phi(G) = 1$, существует максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$. Поэтому из $M \in \mathfrak{F}$ и $G/N \simeq M/M \cap N$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично показывается, что $G/L \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \simeq G/N \cap L \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Значит, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Шаг 2. Подгруппа N является $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.

Утверждение следует из определения $\mathfrak{F}$-критической группы и того, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Шаг 3. Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то либо G — группа простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, либо G — простая неабелева группа.

Если $G^{\mathfrak{F}} = G$, то из равенства $G^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что G — простая группа. При этом если G — абелева группа порядка p, то из $G \notin \mathfrak{F}$ следует $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Шаг 4. Если N — собственная подгруппа группы G, то G/N — циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что в G/N имеются две максимальные подгруппы M_1/N и M_2/N. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-критической группы и равенства $G^{\mathfrak{F}} = N$ следует, что M_1 и M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Так как формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией, имеем

$$G^{\mathfrak{F}} = \langle M_1, M_2 \rangle^{\mathfrak{F}} = \left\langle M_1^{\mathfrak{F}}, M_2^{\mathfrak{F}} \right\rangle = 1,$$

т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$.

Значит, группа G/N обладает единственной максимальной подгруппой. Поэтому она является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Поскольку $G/N \in \mathfrak{F}$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$.

Шаг 5. Если G — разрешимая группа непростого порядка, то она является группой Шмидта.

Из п. 4 следует, что G/N является циклической q-группой для некоторого простого q и принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Если N является q-группой, то и G будет q-группой. Но тогда из $\Phi(G) = 1$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $G \in \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$.

Следовательно, N является p-группой и $p \neq q$. Пусть M — силовская q-подгруппа группы G. Покажем, что $|M| = q$.

Предположим, что $|M| = q^n$ и $n > 1$. Пусть E и L — циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q. Обозначим через T регулярное сплетение $E \wr L$. Если K — база сплетения, то $T = [K]L$.

Пусть f — каноническое локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Как отмечено выше, формация $f(p)$ наследственная для любого простого p. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $M \simeq G/N = G/C_G(N) \notin f(p)$. Предположим, что $T \in f(p)$. Поскольку ввиду утверждения А.18.9 из [3] подгруппа M изоморфна некоторой подгруппе группы T, из наследственности формации имеем, что $M \in f(p)$. Пришли к противоречию с тем, что $M \notin f(p)$. Значит, $T \notin f(p)$. Отметим, что T — q-группа и $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $T \in \mathfrak{F}$.

Пусть $R = P \wr T$, где P — циклическая группа порядка p. Обозначим через C базу сплетения R. Тогда $R = [C]T = [C]([K]L)$. Так как $R/C \simeq T \in \mathfrak{F}$, то $R^{\mathfrak{F}} \subseteq C$. Следовательно, подгруппы CK и CL $\mathfrak{F}$-субнормальны в R. Кроме того, из локальности формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $CK \in \mathfrak{F}$ и $CL \in \mathfrak{F}$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией, $R \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из равенства $F_p(R) = C$ имеем, что $T \simeq R/C \in f(p)$; противоречие. Значит, $n = 1$.

Простая проверка показывает, что в группе G все максимальные подгруппы нильпотентны. В силу того, что сама группа не нильпотентна, G — группа Шмидта.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — GWP-формация, у которой каждая критическая группа, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является либо простой группой, либо группой Шмидта.

Ввиду теорем 2.2 и 2.3 формация $\mathfrak{F}$ наследственная, насыщенная и решеточная. Поэтому на основании теоремы 2.1 она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ — наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$;

4) всякая нециклическая $\mathfrak{M}$-критическая группа G с единичной подгруппой Фраттини является примитивной группой с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N — циклическая примарная группа.

Покажем, что формация $\mathfrak{M}$ замкнута относительно расширений. Предположим, что это не так. Из всех не принадлежащих формации $\mathfrak{M}$ групп G таких, что $G/N \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{M}$, выберем группу H наименьшего порядка. Так как формация $\mathfrak{M}$ наследственная, H — $\mathfrak{M}$-критическая группа. Из определения формации $\mathfrak{F}$ вытекает, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_{\pi(\mathfrak{M})}$. Поэтому H — $\mathfrak{F}$-критическая группа.

Рассмотрим группу $H/\Phi(H)$. Если $H/\Phi(H) \in \mathfrak{F}$, то из насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}_{\pi(\mathfrak{M})} = \mathfrak{M}$; противоречие. Стало быть, $H/\Phi(H)$ не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $H/\Phi(H)$ — $\mathfrak{F}$-критическая группа. Поэтому в силу условия теоремы группа $H/\Phi(H)$ является либо простой группой, либо группой Шмидта. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $H/\Phi(H)$ — простая группа. Из равенства $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_{\pi(\mathfrak{M})}$ получаем, что $H/\Phi(H)$ не принадлежит формации $\mathfrak{M}$.

Ввиду выбора группы H в ней имеется нормальная подгруппа N такая, что $H/N \in \mathfrak{M}$ и $N \in \mathfrak{M}$. Если $N \subseteq \Phi(H)$, то группа $H/\Phi(H)$ принадлежит формации $\mathfrak{M}$ как гомоморфный образ группы H/N; противоречие. Значит, N не содержится в $\Phi(H)$. Так как группа $H/\Phi(H)$ простая, $H = N\Phi(H)$, что невозможно; противоречие.

2. Пусть $H/\Phi(H)$ — группа Шмидта. Тогда, в частности, группа H разрешима. Поскольку $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$, из того, что H — $\pi(\mathfrak{M})$-группа, следует, что $H \in \mathfrak{M}$. Снова пришли к противоречию. Значит, формация $\mathfrak{M}$ замкнута относительно расширений.

Окончательно получаем, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$;

3) $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, замкнутая относительно расширений.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = \times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$;

3) $\mathfrak{M}$ — наследственная формация, замкнутая относительно расширений.

Ввиду теоремы 2.1 из [1] формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией. Пусть G — $\mathfrak{F}$-критическая группа, имеющая единичную подгруппу Фраттини. Ввиду теоремы 3.1 справедливо одно из следующих утверждений:

1) группа G имеет простой порядок p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;

2) G — простая неабелева группа;

3) группа G является группой Шмидта;

4) G — примитивная группа с единственной неабелевой минимальной нормальной подгруппой N и G/N — циклическая q-группа для некоторого $q \in \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что случай 4 невозможен.

Если порядок группы G делится хотя бы на одно простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$, то из определения $\mathfrak{F}$-критической группы следует, что G — группа простого порядка p и $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Если $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то рассмотрим три возможных случая.

1. Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Тогда так как формация $\mathfrak{M}$ замкнута относительно расширений, группа G простая.

2. Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда из разрешимости формации $\mathfrak{H}$ вытекает, что группа G не может быть примитивной группой с неабелевой минимальной нормальной подгруппой.

3. Пусть $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$ и $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{H}) \neq \varnothing$. Обозначим $\pi = \pi(G) \cap \pi(\mathfrak{M})$. Пусть σ — дополнение к множеству π в множестве всех простых чисел. Из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что группа G не принадлежит формации $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_\sigma$, а все ее собственные подгруппы входят в $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_\sigma$ ($\mathfrak{G}$ — формация всех групп). В этом случае ввиду первого следствия из [9] группа G является группой Шмидта.

Итак, каждая $\mathfrak{F}$-критическая группа, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является либо простой группой, либо группой Шмидта.

Теорема доказана.

5. Новые примеры GWP-формаций

Для построения новой серии GWP-формаций воспользуемся методом тестирования GWP-формаций, предложенным в [2].

Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация Фиттинга. Предположим, что $\mathfrak{F} = \times_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторое семейство наследственных формаций и $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Для заданной группы Z обозначим через $\mathfrak{R}(Z,\mathfrak{F})$ множество всех пар (H,K) подгрупп таких, что H и K $\mathfrak{F}$-субнормальны в $\langle H,K\rangle$ и $\langle H^{\mathfrak{F}},K^{\mathfrak{F}}\rangle \neq \langle H,K\rangle^{\mathfrak{F}}$. Пусть $\mathfrak{W}(\mathfrak{F})$ обозначает класс всех групп Z таких, что $\mathfrak{R}(Z,\mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Если $\mathfrak{F}$ не является GWP-формацией, то класс $\mathfrak{W}(\mathfrak{F})$ непустой.

Пусть G — группа наименьшего порядка, принадлежащая классу $\mathfrak{W}(\mathfrak{F})$. Тогда G имеет по крайней мере две $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы A и B, для которых выполняется неравенство $\langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle \neq \langle A,B\rangle^{\mathfrak{F}}$. Выберем далее подгруппы A и B так, что сумма $|A|+|B|$ максимальна.

Тогда, как показано в [2, с. 303–305], группа G и подгруппы A и B обладают следующими свойствами:

1) $G=\langle A,B\rangle$;

2) $\mathrm{Soc}(G) \subseteq G^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle N$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G; в частности, $\mathrm{Core}_G(\langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle)=1$;

3) подгруппа $\langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle$ нормальна в $G^{\mathfrak{F}}$;

4) если H — простая группа, изоморфная композиционному фактору минимальной нормальной подгруппы N группы G, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathrm{form}(H)$;

5) $N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G;

6) $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$;

7) $G^{\mathfrak{F}}$ содержится в $A\cap B$; в частности, $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ — подгруппа группы G;

8) если $G^{\mathfrak{F}}$ — неабелева группа, то $G \in b(\mathfrak{F})$;

9) существуют $i,j \in I$ такие, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}_i$ и $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}_j$; в частности, если $G \notin b(\mathfrak{F})$ или $G^{\mathfrak{F}}$ — неабелева группа, то $i=j$.

Через $b(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех групп $G \notin \mathfrak{F}$ таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G. Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация Фиттинга, то, следуя [2], через $b_n(\mathfrak{F})$ будем обозначать класс всех групп $G \in b(\mathfrak{F})$ таких, что цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ неабелев и группа G обладает описанными выше свойствами 1–9.

Теорема 4.1 [2, теорема 6.5.46]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная решеточная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией, когда для любой группы $G \in b_n(\mathfrak{F})$ выполняется условие: если $G=\langle A,B\rangle$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G, то $G^{\mathfrak{F}}=\langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle$.*

Теорема 4.2. *Пусть S — $\mathfrak{S}$-критическая простая неабелева группа, $\pi=\pi(S)$ и $\mathfrak{M}=\mathfrak{S}_\pi form(S)$. Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\times\mathfrak{H}$, $\pi(\mathfrak{M})\cap\pi(\mathfrak{H})=\varnothing$ и существует разбиение $\{\pi_i \mid i\in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно не пересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{H}=\times_{i\in I}\mathfrak{S}_{\pi_i}$, то $\mathfrak{F}$ — GWP-формация.*

Доказательство. Отметим, что ввиду теорем 2.1 и 2.4, а также леммы 3.1.14 из [5] $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная решеточная формация. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является GWP-формацией. Тогда ввиду теоремы 4.1 существуют группа $G \in b_n(\mathfrak{F})$ и пара (A,B) $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G таких, что $G=\langle A,B\rangle$ и $G^{\mathfrak{F}} \neq \langle A^{\mathfrak{F}},B^{\mathfrak{F}}\rangle$. Выберем пару (A,B) так, что сумма $|A|+|B|$ максимальна. Тогда группа G обладает приведенными выше свойствами 1–9. Так как $G\in b(\mathfrak{F})$ и цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ неабелев, в частности, из свойства 9 следует, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$ и $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{M}$. Значит, по свойству 8 $G^{\mathfrak{F}}=G^{\mathfrak{M}}$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $G^{\mathfrak{M}} \in \mathrm{form}(S)$. Отметим еще, что по свойству 7 подгруппа $G^{\mathfrak{M}}$ содержится в $A\cap B$.

Пусть P — силовская p-подгруппа группы A. Рассмотрим подгруппу $PG^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}$ группы $A/A^{\mathfrak{M}}$. Так как формация $\mathfrak{M}$ наследственная, $PG^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$, и из строения формации $\mathfrak{M}$ следует, что

$$PG^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}} = O_p(PG^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}) \times (G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}).$$

Поскольку силовская p-подгруппа P выбрана произвольным образом, справедливо равенство

$$A/A^{\mathfrak{M}} = (G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}})C_{A/A^{\mathfrak{M}}}(G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}).$$

Ввиду свойств 3 и 7 $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$, то $A^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{M}}$ и $B^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{M}}$. Поэтому $A^{\mathfrak{M}}B^{\mathfrak{M}}$ — нормальная подгруппа группы $G^{\mathfrak{M}}$, а значит, подгруппа $B^{\mathfrak{M}}A^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}$ нормальна в $G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}$. Имеем

$$N_A(B^{\mathfrak{M}}A^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}) \supseteq (G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}})C_{A/A^{\mathfrak{M}}}(G^{\mathfrak{M}}/A^{\mathfrak{M}}) = A/A^{\mathfrak{M}},$$

т. е. $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы A. Аналогично показывается, что подгруппа $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ нормальна в группе B. Значит, $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}$ — нормальная подгруппа группы G. Если $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то приходим к противоречию со свойством 2.

Значит, $A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = 1$. В этом случае подгруппы A и B принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 3.1.6 из [5] группа G принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию.

Итак, для любой группы $G \in b_n(\mathfrak{F})$ выполняется условие: если $G = \langle A, B\rangle$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G, то $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}\rangle$. На основании теоремы 4.1 формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией.

Теорема доказана.

Замечание. Формация $\mathfrak{F}$ из теоремы 4.2 обладает критическими группами типа (IV). Если, например, S — знакопеременная группа степени 5, то $\mathfrak{F}$-критической группой будет симметрическая группа степени 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников С. Ф.* Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1065–1080.
2. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Каморников С. Ф., Шеметков Л. А.* О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 5. С. 493–513.
5. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.
6. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
7. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. 1992. V. 148. P. 42–52.
8. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V.* On formations of finite groups with the generalised Wielandt property for residuals // J. Algebra. 2014. V. 412. P. 173–178.
9. *Arad Z., Chillag D.* A criterion for the existence of normal π-complemets in finite groups // J. Algebra. 1984. V. 87, N 2. P. 472–482.

Статья поступила 30 марта 2014 г.

Каморников Сергей Федорович
Международный университет МИТСО,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru