С. Ф. Каморников, Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 402–411

DOI: 10.4213/mzm4622

Математические заметки

Том 87 выпуск 3 март 2010

УДК 512.542

# Обобщенные подгруппы Фраттини как корадикалы групп

**С. Ф. Каморников**

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Устанавливается, что класс всех регулярных подгрупповых $m$-функторов совпадает с классом всех $X$-абнормальных $m$-функторов, где $X$ пробегает все подклассы класса всех примитивных групп. Изучаются свойства решетки всех регулярных подгрупповых $m$-функторов, описываются атомы и коатомы этой решетки. Доказывается, что обобщенная подгруппа Фраттини группы $G$, соответствующая регулярному $m$-функтору, совпадает с $X$-корадикалом группы $G$ для некоторого $R_0$-замкнутого класса $X$.

Библиография: 8 названий.

**1. Введение.** В данной работе рассматриваются только конечные разрешимые группы (под группой всегда подразумевается конечная разрешимая группа).

Во многих работах, посвященных максимальным подгруппам и их пересечениям, четко прослеживаются два направления.

Первое из них связано с применением идей и методов теории формаций. В его основе лежит понятие $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппы. Напомним [1], [2], что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то максимальная подгруппа $M$ группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-*нормальной*, если она содержит $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы $G$, и $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Второе направление занимается изучением свойств максимальных подгрупп, определяемых некоторыми ограничениями на их индексы.

Бесспорно, имеется тесная связь между обоими направлениями. В то же время существуют примеры систем максимальных подгрупп, которые не могут быть охарактеризованы в терминах $\mathfrak{F}$-абнормальности или $\mathfrak{F}$-нормальности ни для какой формации $\mathfrak{F}$. Такой пример дают, в частности, максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на заданное простое число $p$.

Применение функциональных схем исследования свойств максимальных подгрупп позволяет объединить два указанных подхода и по-новому взглянуть на задачи о пересечениях максимальных подгрупп. Центральным на этом пути оказалось следующее определение, аксиоматизирующее свойство инвариантности при гомоморфизмах большинства известных классов максимальных подгрупп.

Согласно [3] подгрупповым $m$-*функтором* называется функция $\Theta$, которая сопоставляет каждой группе $G$ некоторое множество $\Theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу $G$. При этом предполагается, что $\Theta(G^{\alpha}) = (\Theta(G))^{\alpha}$ для любого изоморфизма $\alpha\colon G \to G^{\alpha}$.

Подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;
2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

Множество всех регулярных $m$-функторов обозначим через $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$. На этом множестве определим операции пересечения и объединения следующим образом:

$$(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G), \qquad (\Theta_1 \cup \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cup \Theta_2(G)$$

для любых двух $m$-функторов $\Theta_1$ и $\Theta_2$ и любой группы $G$. Как показано в [3], $m$-функтор $\bigcap_{i\in I} \Theta_i$ является нижней гранью множества $\{\Theta_i \mid i \in I\}$ в $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, а $m$-функтор $\bigcup_{i\in I} \Theta_i$ является его верхней гранью. Таким образом, $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ – полная, бесконечно дистрибутивная решетка относительно частичного порядка, определяемого теоретико-множественным включением. Более того, решетка $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ является булевой (см., например, [3]).

В настоящей работе устанавливается, что все регулярные подгрупповые $m$-функторы исчерпываются $\mathfrak{X}$-абнормальными $m$-функторами. Правда, в качестве $\mathfrak{X}$ выступает не формация, а класс примитивных групп. Таким образом, регулярные подгрупповые $m$-функторы не расширяют класс $\mathfrak{X}$-абнормальных (или $\mathfrak{X}$-нормальных) $m$-функторов, как это казалось ранее; регулярные $m$-функторы, задаваемые ограничениями на индексы максимальных подгрупп, также являются $\mathfrak{X}$-абнормальными (или $\mathfrak{X}$-нормальными). В связи с этим обобщенные подгруппы Фраттини, изучавшиеся разными авторами, на самом деле оказываются $\mathfrak{X}$-корадикалами.

Кроме того, в работе устанавливается точное строение решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, описываются ее атомы и коатомы, изучается строение соответствующих им обобщенных подгрупп Фраттини. В доказательствах существенно используется тот факт, что в разрешимой группе нефраттиниевы главные факторы дополняемы. В работе используются определения и обозначения, принятые в [3]–[5].

**2. Характеризации регулярных $m$-функторов.** Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Максимальная подгруппа $M$ группы $G$ называется

1) $\mathfrak{X}$-*нормальной*, если $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$;
2) $\mathfrak{X}$-*абнормальной*, если $G/\operatorname{Core}_G(M) \notin \mathfrak{X}$.

В случае, когда $\mathfrak{X}$ – непустая формация, т.е. класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений с конечным числом сомножителей, данное определение эквивалентно приведенному выше.

По определению (см. [3]), подгрупповой функтор выделяет в каждой группе некоторую систему ее подгрупп, включая и саму группу. Подгрупповой функтор $\Theta$ называется $\mathfrak{X}$-*нормальным* ($\mathfrak{X}$-*абнормальным*), если он выделяет в каждой группе $G$ саму группу $G$ и все ее $\mathfrak{X}$-нормальные ($\mathfrak{X}$-абнормальные) максимальные подгруппы.

В дальнейшем через $\mathscr{P}$ будем обозначать класс всех (разрешимых) примитивных групп. Напомним, что группа $G$ называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром. Как показано в [6], группа $G$ примитивна тогда и только тогда, когда она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая дополняема в $G$. Это дополнение является максимальной подгруппой группы $G$ с единичным ядром и называется ее *примитиватором*. Понятно, что если $M$ – максимальная подгруппа группы $G$, то группа $G/\operatorname{Core}_G(M)$ примитивна и $M/\operatorname{Core}_G(M)$ – примитиватор группы $G/\operatorname{Core}_G(M)$.

В дальнейшем любой (в том числе и пустой) подкласс класса $\mathscr{P}$ будем называть *примитивным классом.*

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс, и пусть $\Theta$ – отображение, которое ставит в соответствие каждой группе $G$ множество $\Theta(G)$, состоящее из группы $G$ и всех тех максимальных подгрупп $M$ группы $G$, для которых $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$. Тогда*

1) *$\Theta$ – регулярный подгрупповой $m$-функтор;*
2) *$m$-функтор $\Theta$ является $(\mathscr{P} \setminus \mathfrak{X})$-абнормальным.*

Доказательство. 1) Пусть $\varphi\colon G \to G^\varphi$ – групповой изоморфизм. Так как $\mathfrak{X}$ – класс групп, то ввиду изоморфизма

$$G^\varphi/\operatorname{Core}_{G^\varphi}(M^\varphi) \simeq G/\operatorname{Core}_G(M)$$

имеем $G^\varphi/\operatorname{Core}_{G^\varphi}(M^\varphi) \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $(\Theta(G))^\varphi = \Theta(G^\varphi)$, т.е. $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор.

Пусть $N$ – нормальная подгруппа группы $G$ и $M \in \Theta(G)$. Если $N$ не содержится в $M$, то $MN/N = G/N \in \Theta(G/N)$. Если же $N \subseteq M$, то $N \subseteq \operatorname{Core}_G(M)$. Поэтому

$$G/N/\operatorname{Core}_{G/N}(M/N) = G/N/\operatorname{Core}_G(M)/N \simeq G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}.$$

Значит, $M/N \in \Theta(G/N)$. Верно и обратное. Если $M/N \in \Theta(G/N)$, то $M \in \Theta(G)$. Таким образом, $m$-функтор $\Theta$ является регулярным.

Утверждение 2) следует из определения $(\mathscr{P} \setminus \mathfrak{X})$-абнормального $m$-функтора.

Теорема 1. *Пусть $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор. Тогда и только тогда $\Theta$ является регулярным, когда он $\mathfrak{X}$-нормален для некоторого примитивного класса $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{X}$ – примитивный класс групп и $\Theta$ – $\mathfrak{X}$-нормальный подгрупповой $m$-функтор, то в силу леммы 1 $m$-функтор $\Theta$ является регулярным.

Докажем обратное. Пусть $\Theta$ – регулярный подгрупповой $m$-функтор. Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех тех примитивных групп $A$, примитиваторы которых принадлежат $\Theta(A)$. Пусть $\tau$ – $\mathfrak{X}$-нормальный подгрупповой $m$-функтор. Покажем, что $\Theta = \tau$.

Пусть $G$ – произвольная группа и $M \in \Theta(G)$. В силу регулярности $m$-функтора $\Theta$ имеем

$$M/\operatorname{Core}_G(M) \in \Theta(G/\operatorname{Core}_G(M)).$$

При этом $M/\operatorname{Core}_G(M)$ – примитиватор группы $G/\operatorname{Core}_G(M)$. Отсюда и из определения класса $\mathfrak{X}$ следует, что $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, т.е. $M$ – $\mathfrak{X}$-нормальная максимальная подгруппа группы $G$. Таким образом, $\Theta(G) \subseteq \tau(G)$.

Пусть теперь $H \in \tau(G)$. Тогда

$$G/\operatorname{Core}_G(H) \in \mathfrak{X}.$$

Так как группа $G/\operatorname{Core}_G(H)$ примитивна, а $H/\operatorname{Core}_G(H)$ – ее примитиватор, то из определения класса $\mathfrak{X}$ имеем $H/\operatorname{Core}_G(H) \in \Theta(G/\operatorname{Core}_G(H))$. Отсюда и из регулярности $m$-функтора $\Theta$ заключаем, что $H \in \Theta(G)$. Значит, $\tau(G) \subseteq \Theta(G)$.

Следствие 1.1. *Пусть $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор, и пусть $\mathfrak{X}$ – класс всех тех примитивных групп $A$, примитиваторы которых принадлежат $\Theta(A)$. Тогда и только тогда $\Theta$ является регулярным, когда он $(\mathscr{P} \setminus \mathfrak{X})$-абнормален.*

Следствие 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный класс групп, и пусть $\mathfrak{X}$ – класс, состоящий из всех тех примитивных групп $A$, примитиваторы которых $\mathfrak{F}$-нормальны в $A$. Тогда*

1) *подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является $\mathfrak{F}$-нормальным тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{X}$-нормален;*
2) *подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является $\mathfrak{F}$-абнормальным тогда и только тогда, когда он $\mathfrak{X}$-абнормален.*

Замечания. 1. В силу следствия 1.2 множество всех регулярных подгрупповых $m$-функторов совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}$-нормальных ($\mathfrak{F}$-абнормальных) $m$-функторов, если $\mathfrak{F}$ пробегает множество всех классов групп, а также совпадает с множеством всех $\mathfrak{X}$-нормальных ($\mathfrak{X}$-абнормальных) $m$-функторов, если $\mathfrak{X}$ пробегает множество всех примитивных классов групп.

2. Подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является единичным (единицей решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$) тогда и только тогда, когда он является $\mathscr{P}$-нормальным.

3. Подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является нулевым (нулем решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$) тогда и только тогда, когда он является $\varnothing$-нормальным.

4. Пусть $\pi$ – непустое множество простых чисел, и пусть $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из $\pi$. Тогда $\Theta$ регулярен и является $\mathfrak{X}$-нормальным, где $\mathfrak{X}$ – класс всех примитивных групп, цоколь которых является $\pi'$-группой.

**3. Строение решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$.** Обозначим через $Cl(\mathscr{P})$ множество всех подклассов класса $\mathscr{P}$ всех примитивных групп. На этом множестве естественным образом введем отношение частичного порядка: $\mathfrak{X}_1 \leqslant \mathfrak{X}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Тогда $Cl(\mathscr{P})$ является полной решеткой, в которой

$$\mathfrak{X}_1 \wedge \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2, \qquad \mathfrak{X}_1 \vee \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2.$$

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является пустой класс $\varnothing$. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает класс $\mathscr{P}$. Понятно, что решетка $Cl(\mathscr{P})$ является бесконечно дистрибутивной. Кроме того, любой элемент $\mathfrak{X} \in Cl(\mathscr{P})$ обладает дополнением $\mathscr{P} \setminus \mathfrak{X}$. Поэтому решетка $Cl(\mathscr{P})$ является булевой.

Для ненулевого $m$-функтора $\Theta \in \mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ определим класс $\mathscr{P}(\Theta)$ следующим образом:

$$\mathscr{P}(\Theta) = \{A \in \mathscr{P} \mid \text{примитиватор группы } A \text{ принадлежит } \Theta(A)\}.$$

Если $\Theta$ – нулевой $m$-функтор (т.е. $\Theta(G) = \{G\}$ для любой группы $G$), то полагаем $\mathscr{P}(\Theta) = \varnothing$.

Следующая теорема устанавливает связь между решетками $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ и $Cl(\mathscr{P})$.

Теорема 2. *Решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ и $Cl(\mathscr{P})$ изоморфны.*

Доказательство. Покажем, что отображение $\varphi\colon \Theta \to \mathscr{P}(\Theta)$, сопоставляющее каждому регулярному подгрупповому $m$-функтору $\Theta$ примитивный класс $\mathscr{P}(\Theta)$, является искомым изоморфизмом.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый примитивный класс. Тогда в силу леммы 1 отображение $\tau$, ставящее в соответствие каждой группе $G$ множество $\tau(G)$, содержащее группу $G$ и все те ее максимальные подгруппы $M$, для которых $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}$, является регулярным $m$-функтором. При этом $\varphi(\tau) = \mathfrak{X}$. Поэтому отображение $\varphi$ сюръективно.

Если $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathscr{M}_{\text{reg}}$ и $\Theta_1 \neq \Theta_2$, то найдется группа $D$, для которой выполнено $\Theta_1(D) \neq \Theta_2(D)$. Это значит, что в $D$ существует, к примеру, максимальная подгруппа $M$, принадлежащая $\Theta_1(D)$, но не принадлежащая $\Theta_2(D)$. Поскольку подгрупповые $m$-функторы $\Theta_1$ и $\Theta_2$ регулярны, примитиватор $M/\operatorname{Core}_D(M)$ группы $\overline{D} = D/\operatorname{Core}_D(M)$ принадлежит $\Theta_1(\overline{D})$, но не принадлежит $\Theta_2(\overline{D})$. Следовательно, $\overline{D} \in \varphi(\Theta_1)$, но $\overline{D} \notin \varphi(\Theta_2)$. Значит, $\varphi(\Theta_1) \neq \varphi(\Theta_2)$. Таким образом, отображение $\varphi$ является инъективным.

Покажем теперь, что отображение $\varphi$ является решеточным изоморфизмом. Так как $(\Theta_1 \cap \Theta_2)(G) = \Theta_1(G) \cap \Theta_2(G)$ для любой группы $G$, то

$$\begin{aligned}
\varphi(\Theta_1 \wedge \Theta_2) &= \varphi(\Theta_1 \cap \Theta_2) \\
&= \{D \in \mathscr{P} \mid \text{примитиватор группы } D \text{ принадлежит } (\Theta_1 \cap \Theta_2)(D)\} \\
&= \{A \in \mathscr{P} \mid \text{примитиватор группы } A \text{ принадлежит } (\Theta_1(A)\} \\
&\qquad \cap \{B \in \mathscr{P} \mid \text{примитиватор группы } B \text{ принадлежит } (\Theta_2(B)\} \\
&= \varphi(\Theta_1) \cap \varphi(\Theta_2) = \varphi(\Theta_1) \wedge \varphi(\Theta_2).
\end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\varphi(\Theta_1 \vee \Theta_2) = \varphi(\Theta_1) \vee \varphi(\Theta_2)$.

Таким образом, отображение $\varphi$ является изоморфизмом решеток $\mathscr{M}_{\text{reg}}$ и $Cl(\mathscr{P})$.

Очевидно, решетка $Cl(\mathscr{P})$ является атомной и коатомной. Атомами решетки $Cl(\mathscr{P})$ являются классы вида $\mathfrak{X} = (G)$, где $G$ – примитивная группа, а $(G)$ – класс групп, порожденный группой $G$, т.е. класс, содержащий вместе с группой $G$ все группы, изоморфные $G$. Коатомами решетки $Cl(\mathscr{P})$ являются классы вида $\mathscr{P} \setminus (G)$, где $G$ – примитивная группа.

Следствие 2.1. *Решетка $\mathscr{M}_{\text{reg}}$ является атомной и коатомной.*

Следствие 2.2. *Регулярный подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является атомом решетки $\mathscr{M}_{\text{reg}}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{P}(\Theta) = (G)$ для некоторой примитивной группы $G$.*

Следствие 2.3. *Регулярный подгрупповой $m$-функтор $\Theta$ является коатомом решетки $\mathscr{M}_{\text{reg}}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{P}(\Theta) = \mathscr{P} \setminus (G)$ для некоторой примитивной группы $G$.*

Пример. Пусть $H$ – циклическая группа простого порядка $p$, и пусть $\Theta$ – атом решетки $\mathscr{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathscr{P}(\Theta) = (H)$. Тогда $m$-функтор $\Theta$ выделяет в группе все ее нормальные максимальные подгруппы, имеющие индекс $p$. Если $\tau$ – коатом решетки $\mathscr{M}_{\text{reg}}$, для которого $\mathscr{P}(\tau) = \mathscr{P} \setminus (H)$, то $\tau$ выделяет в группе все максимальные подгруппы, кроме нормальных максимальных подгрупп индекса $p$. Очевидно, при этом $\Theta$ совпадает с $\mathfrak{N}_p$-нормальным, а $\tau$ – с $\mathfrak{N}_p$-абнормальным подгрупповым $m$-функтором, где $\mathfrak{N}_p$ – формация всех $p$-групп.

**4. Обобщенная подгруппа Фраттини относительно атома решетки $\mathscr{M}_{\text{reg}}$.** Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Следуя [5], через $R_0\mathfrak{X}$ обозначим класс всех изоморфных копий конечных подпрямых произведений групп из $\mathfrak{X}$. Понятно, что $G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в $G$ имеются нормальные подгруппы $N_i$, $i = 1, 2, \dots, t$, для которых $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\bigcap_{i=1}^{n} N_i = 1$. Класс $\mathfrak{X}$ называется *$R_0$-замкнутым*, если $R_0\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [5].

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – $R_0$-замкнутый класс, содержащий единичную группу. Тогда для любой группы $G$ множество*

$$J = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \in \mathfrak{X}\},$$

*частично упорядоченное по включению, имеет единственный минимальный элемент $\bigcap_{N \in J} N$, который обозначается через $G^{\mathfrak{X}}$ и называется $\mathfrak{X}$-корадикалом группы $G$.*

Если $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор, то следуя [3], через $\Phi_\Theta(G)$ обозначим обобщенную подгруппу Фраттини, т.е. подгруппу, равную пересечению всех подгрупп, принадлежащих $\Theta(G)$.

Теорема 3. *Пусть $\Theta$ – атом решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ и $\mathscr{P}(\Theta) = (H)$, и пусть $\mathfrak{X} = R_0(H) \cup (1)$. Тогда для любой группы $G$ справедливо равенство $\Phi_\Theta(G) = G^{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Пусть $J = \{N \trianglelefteq G \mid G/N \simeq H\} = \varnothing$. Это значит, что группа $G$ не имеет факторгрупп, изоморфных $H$, а поэтому $\Theta(G) = \{G\}$. Следовательно, $\Phi_\Theta(G) = G = G^{\mathfrak{X}}$.

Пусть теперь $J \neq \varnothing$. Тогда для любой нетривиальной подгруппы $N \in J$ примитиватор $M/N$ группы $G/N$ принадлежит $\Theta(G/N)$. В силу регулярности $m$-функтора $\Theta$ имеем $M \in \Theta(G)$. Кроме того, из $\mathrm{Core}_{G/N}(M/N) = 1$ следует, что $\mathrm{Core}_G(M) = N$. Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что

$$\Phi_\Theta(G) \subseteq \bigcap_{N \in J} N = G^{\mathfrak{X}}.$$

Допустим, что $\Phi_\Theta(G) \subset G^{\mathfrak{X}}$. Пусть $L/\Phi_\Theta(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_\Theta(G)$, содержащаяся в $G^{\mathfrak{X}}/\Phi_\Theta(G)$. Так как

$$\Phi(G/\Phi_\Theta(G)) = 1,$$

то $L/\Phi_\Theta(G)$ – дополняемый главный фактор группы $G$. Пусть $M$ – максимальная подгруппа группы $G$, дополняющая $L/\Phi_\Theta(G)$. Предположим, что $M$ не принадлежит $\Theta(G)$. В силу леммы 3.29 из [7]

$$G/\mathrm{Core}_G(M) \simeq [L/\Phi_\Theta(G)](G/C_G(L/\Phi_\Theta(G))).$$

Отсюда следует, что для любой другой максимальной подгруппы $D$ группы $G$, дополняющей главный фактор $L/\Phi_\Theta(G)$, имеет место изоморфизм

$$G/\mathrm{Core}_G(M) \simeq G/\mathrm{Core}_G(D).$$

Так как $M$ не принадлежит $\Theta(G)$, группа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ не изоморфна $H$. Но тогда не изоморфна группе $H$ и группа $G/\mathrm{Core}_G(D)$, а следовательно, максимальная подгруппа $D/\mathrm{Core}_G(D)$ не принадлежит $\Theta(G/\mathrm{Core}_G(D))$. Отсюда в силу регулярности $m$-функтора $\Theta$ заключаем, что $D$ не принадлежит $\Theta(G)$. Итак, все максимальные подгруппы группы $G/\Phi_\Theta(G)$, принадлежащие $\Theta(G/\Phi_\Theta(G))$, содержат $L/\Phi_\Theta(G)$. Отсюда

$$L/\Phi_\Theta(G) \subseteq \Phi_\Theta(G/\Phi_\Theta(G)),$$

что противоречит равенству $\Phi_\Theta(G/\Phi_\Theta(G)) = 1$.

Таким образом, $M \in \Theta(G)$. Так как $G/\mathrm{Core}_G(M)$ – примитивная группа и $M/\mathrm{Core}_G(M) \in \Theta(G/\mathrm{Core}_G(M))$, то $G/\mathrm{Core}_G(M) \simeq H$. Отсюда и из определения $\mathfrak{X}$-корадикала следует, что $G^{\mathfrak{X}} \subseteq \mathrm{Core}_G(M)$. Но тогда $L \subseteq G^{\mathfrak{X}} \subseteq \mathrm{Core}_G(M) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $\Phi_\Theta(G) = G^{\mathfrak{X}}$.

**5. Обобщенная подгруппа Фраттини относительно коатома решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$.**

Теорема 4. *Пусть* $\Theta$ *– коатом решетки* $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, $\mathscr{P}(\Theta) = \mathscr{P} \setminus (H)$ *и* $p$ *– простое число, делящее* $|\mathrm{Soc}(H)|$. *Если* $\Phi(G) = 1$ *и* $P$ *– силовская* $p$*-подгруппа группы* $\Phi_\Theta(G)$, *то*

1) $P \trianglelefteq G$;
2) $P = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$, *где* $N_i$ *– минимальная нормальная подгруппа группы* $G$, $i = 1, 2, \ldots, t$;
3) $[N_i](G/C_G(N_i)) \simeq H$, $i = 1, 2, \ldots, t$;
4) $\Phi_\Theta(G)/P = \Phi(G/P)$ *–* $p'$*-группа*;
5) *если* $A$ *– дополнение подгруппы* $P$ *в группе* $G$, *то выполнено* $\Phi_\Theta(G) = P\Phi(A)$ *и* $C_{\Phi(A)}(P) = 1$;
6) *если* $\mathfrak{X} = R_0(H) \cup (1)$, *то* $\Phi_\Theta(G) \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

Доказательство. В силу леммы Фраттини справедливо равенство

$$N_G(P)\Phi_\Theta(G) = G.$$

Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы $G$. Заключим $N_G(P)$ в максимальную подгруппу $M$ группы $G$. Очевидно, индекс $|G : M|$ не делится на $p$. С другой стороны, так как $M\Phi_\Theta(G) = G$, то $M \in \tau(G)$, где $\tau$ – атом решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, для которого $\mathscr{P}(\tau) = (H)$. Поэтому $G/\operatorname{Core}_G(M) \simeq H$. Отсюда и из того, что $p$ делит $|\mathrm{Soc}(H)|$, следует, что

$$|G/\operatorname{Core}_G(M) : M/\operatorname{Core}_G(M)| = |G : M|$$

есть степень простого числа $p$. Пришли к противоречию. Следовательно, $P \trianglelefteq G$. Утверждение 1) доказано.

Так как $\Phi(G) = 1$ и $P \trianglelefteq G$, в силу леммы 7.9 из [4] подгруппа $P$ равна прямому произведению некоторого числа $t$ минимальных нормальных подгрупп $N_i$ группы $G$. Утверждение 2) доказано.

Если $N_i$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $P$, то в силу равенства $\Phi(G) = 1$ подгруппа $N_i$ дополняема в $G$. Если $M_i$ – максимальная подгруппа группы $G$, дополняющая подгруппу $N_i$, то из $N_i \subseteq \Phi_\Theta(G)$ следует $M_i \in \tau(G)$. Поэтому $G/\operatorname{Core}_G(M_i) \simeq H$. В силу леммы 3.29 из [7] имеем

$$G/\operatorname{Core}_G(M_i) \simeq [N_i](G/C_G(N_i)).$$

Поэтому $[N_i](G/C_G(N_i)) \simeq H$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Утверждение 3) доказано.

Пусть $L/K$ – главный фактор группы $G$, причем $P \subseteq K \subset L \subseteq \Phi_\Theta(G)$. Так как $P$ – силовская $p$-подгруппа группы $\Phi_\Theta(G)$, то $L/K$ – $p'$-группа. Предположим, что фактор $L/K$ дополняем в $G$. Пусть $D$ – дополнение для $L/K$ в $G$. Тогда $G/\operatorname{Core}_G(D) \simeq H$. Поэтому из $|L/K| = |\mathrm{Soc}(H)|$ следует, что $L/K$ – $p$-группа. Получили противоречие. Следовательно, все $G$-главные факторы группы $\Phi_\Theta(G)/P$ являются фраттиниевыми, а значит, $\Phi_\Theta(G)/P \subseteq \Phi(G/P)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $\Phi_\Theta(G)/P = \Phi(G/P)$. Утверждение 4) доказано.

В силу леммы 7.9 из [4] подгруппа $P$ дополняема в $G$. Пусть $A$ – одно из таких дополнений. Так как каждая максимальная подгруппа $M$ группы $G$, содержащая $P$, имеет вид $M = M_1P$, где $M_1$ – максимальная подгруппа $A$, то $\Phi(G/P) = \Phi(A)P/P$. Отсюда и из утверждения 4) следует, что $\Phi_\Theta(G) = P\Phi(A)$. Кроме того, на основании леммы V.5.12 из [5] справедливо равенство $C_{\Phi(A)}(P) = \Phi(G) = 1$. Утверждение 5) доказано.

Очевидно, подгрупповые $m$-функторы $\Theta$ и $\tau$ взаимодополняемы в решетке $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$. Поэтому $\Phi_\Theta(G) \cap \Phi_\tau(G) = \Phi(G)$. На основании теоремы 3 справедливо равенство $\Phi_\tau(G) = G^{\mathfrak{X}}$. Отсюда имеем, что $\Phi_\Theta(G) \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

Замечание. Следующий пример показывает, что в теореме 4 в общем случае факторгруппа $\Phi_\Theta(G)/P$ может быть неединичной. Пусть $\Theta$ – коатом решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, для которого $\mathscr{P}(\Theta) = \mathscr{P} \setminus (H)$, где $H$ – голоморф циклической группы порядка 17. Тогда если $P$ – силовская 17-подгруппа группы $H$, то $\Phi_\Theta(H)/P$ – циклическая группа порядка 8.

Далее через $Z_p$ мы обозначаем циклическую группу простого порядка $p$, а через $\Delta^{\mathfrak{X}}(G)$ будем обозначать пересечение всех $\mathfrak{X}$-абнормальных максимальных подгрупп группы $G$ ($\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп).

Следствие 4.1. *Пусть* $\Theta$ *– коатом решетки* $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, *для которого* $\mathscr{P}(\Theta) = \mathscr{P} \setminus (Z_p)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi_\Theta(G) = \Delta^{\mathfrak{N}_p}(G)$;
2) *выполнено*
$$\Phi_\Theta(G)/\Phi(G) = N_1/\Phi(G) \times \cdots \times N_t/\Phi(G),$$
*где* $N_i/\Phi(G) \subseteq Z(G/\Phi(G))$ *и* $|N_i/\Phi(G)| = p$ *для всех* $i = 1, 2, \dots, t$;
3) $G/\Phi(G) = \Phi_\Theta(G)/\Phi(G) \times A/\Phi(G)$;
4) *если* $\mathfrak{X} = R_0(Z_p) \cup (1)$, *то* $G^{\mathfrak{X}} \subseteq A$ *и*
$$A/G^{\mathfrak{X}} = K_1/G^{\mathfrak{X}} \times \cdots \times K_s/G^{\mathfrak{X}},$$
*где* $|K_j/G^{\mathfrak{X}}| = p$ *для любого* $j = 1, 2, \dots, s$.

**6. Общий случай.** Зафиксируем далее группу $G$. Через $\mathscr{P}(G)$ обозначим класс всех примитивных групп, изоморфных факторгруппам группы $G$ (если $G = 1$, то $\mathscr{P}(G) = \varnothing$).

Лемма 3. *Если* $\Theta_1$ *и* $\Theta_2$ *– подгрупповые* $m$*-функторы, то*
$$\Phi_{\Theta_1 \cup \Theta_2}(G) = \Phi_{\Theta_1}(G) \cap \Phi_{\Theta_2}(G).$$

Доказательство. Пусть $\Theta_1(G) = \{G, M_1, \dots, M_n\}$, $\Theta_2(G) = \{G, D_1, \dots, D_k\}$. Тогда
$$\Phi_{\Theta_1 \cup \Theta_2}(G) = (G \cap M_1 \cap \cdots \cap M_n) \cap (G \cap D_1 \cap \cdots \cap D_k) = \Phi_{\Theta_1}(G) \cap \Phi_{\Theta_2}(G).$$

Теорема 5. *Пусть* $\Theta$ *– регулярный подгрупповой* $m$*-функтор, и пусть*
$$\mathscr{P}(\Theta) \cap \mathscr{P}(G) = (H_1, \dots, H_t),$$
*где* $\{H_1, \dots, H_t\}$ *– максимальное множество попарно неизоморфных примитивных групп из* $\mathscr{P}(\Theta) \cap \mathscr{P}(G)$. *Если* $\Theta_i$ *– атом решетки* $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, *для которого* $\mathscr{P}(\Theta_i) = (H_i)$, $i = 1, \dots, t$, *то*

1) $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^t \Phi_{\Theta_i}(G)$;
2) $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^t (G^{\mathfrak{X}_i})$, *где* $\mathfrak{X}_i = R_0(H_i) \cup (1)$;
3) $\Phi_\Theta(G) = G^{\mathfrak{X}}$, *где* $\mathfrak{X} = R_0(\mathscr{P}(\Theta) \cap \mathscr{P}(G)) \cup (1)$.

Доказательство. Пусть $\tau = \bigcup_{i=1}^{t} \Theta_i$. Простая проверка показывает, что выполнено $\Phi_\Theta(G) = \Phi_\tau(G)$. Теперь утверждение 1) прямо следует из леммы 3. На основании теоремы 3, $\Phi_{\Theta_i}(G) = G^{\mathfrak{X}_i}$. Отсюда следует, что $\Phi_\Theta(G) = \bigcap_{i=1}^{t}(G^{\mathfrak{X}_i})$. Утверждение 3) вытекает из определения $\mathfrak{X}$-корадикала и того, что $G^{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i=1}^{t}(G^{\mathfrak{X}_i})$.

Замечание. Из леммы 3 следует, что множество

$$\{\Phi_\Theta(G) \mid \Theta \in \mathscr{M}_{\mathrm{reg}}\}$$

частично упорядоченное по включению, является нижней полурешеткой, а следовательно, и полной решеткой. Нулем этой решетки является подгруппа Фраттини $\Phi(G)$, а единицей – сама группа $G$.

Следующий пример показывает, что отображение

$$\varphi\colon \Theta \mapsto \Phi_\Theta(G)$$

не является антигомоморфизмом решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ в решетку нормальных подгрупп группы $G$.

Пример. Пусть $G$ – группа, изоморфная симметрической группе третьей степени, и пусть $\Theta_1$ – подгрупповой $m$-функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, индекс которых не делится на 3, а $\Theta_2$ – подгрупповой $m$-функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все ее максимальные подгруппы, индекс которых не делится на 2. Если $Q$ – силовская 3-подгруппа группы $G$, а $P$ – силовская 2-подгруппа группы $G$, то

$$\Theta_1(G) = \{G, Q\}, \qquad \Theta_2(G) = \{G, P^x \mid x \in G\}.$$

Поэтому

$$\Phi_{\Theta_1}(G) = Q, \qquad \Phi_{\Theta_2}(G) = 1, \qquad \Phi_{\Theta_1 \cap \Theta_2}(G) = G.$$

Значит, $\Phi_{\Theta_1\cap\Theta_2}(G) \neq \Phi_{\Theta_1}(G)\Phi_{\Theta_2}(G)$.

Следующий пример показывает, что в общем случае решетка

$$\{\Phi_\Theta(G) \mid \Theta \in \mathscr{M}_{\mathrm{reg}}\}$$

не является подрешеткой решетки всех нормальных подгрупп группы $G$.

Пример. Пусть $G$ – группа из предыдущего примера, и пусть $D = A \times G$, где $A$ – циклическая группа порядка 2. Если $\Theta_1$ – нормальный подгрупповой $m$-функтор (т.е. $m$-функтор, выделяющий все нормальные максимальные подгруппы), $\Theta_2$ – его дополнение в решетке $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, то

$$\Phi_{\Theta_1}(D) = Q, \qquad \Phi_{\Theta_2}(D) = A.$$

Предположим, что $\Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D) \in \{\Phi_\Theta(D) \mid \Theta \in \mathscr{M}_{\mathrm{reg}}\}$. Тогда найдется регулярный подгрупповой $m$-функтор $\Theta$, для которого справедливо равенство

$$\Phi_\Theta(D) = \Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D).$$

Так как $|D : \Phi_\Theta(D)| = 2$, то $\Theta(D) \supseteq \{D, A \times Q\}$. Но ввиду того, что $\Theta$ – подгрупповой $m$-функтор, подгруппа $PQ$ также принадлежат $\Theta(D)$. Пришли к противоречию. Следовательно, подгруппа $\Phi_{\Theta_1}(D)\Phi_{\Theta_2}(D)$ не принадлежит решетке $\{\Phi_\Theta(D) \mid \Theta \in \mathscr{M}_{\mathrm{reg}}\}$.

Из строения решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ (теорема 2) следует, что любой регулярный подгрупповой $m$-функтор может быть сконструирован как из атомов, так и коатомов решетки $M_{\mathrm{req}}$. В силу теоремы 5 подгруппа $\Phi_\Theta(G)$ группы $G$ может быть построена из подгрупп $\Phi_{\Theta_i}(G)$, где $\Theta_i$ – такие атомы решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$, что $\Theta = \bigcup_{i\in I}\Theta_i$. На основании приведенных примеров для коатомов $\Theta_i$ решетки $\mathscr{M}_{\mathrm{reg}}$ аналогичное представление подгруппы $\Phi_\Theta(G)$ произведением соответствующих подгрупп $\Phi_{\Theta_i}(G)$ невозможно.

Условие разрешимости групп в данной работе является существенным. Связано это с тем, что по теореме Оре [8] в разрешимой примитивной группе все примитиваторы сопряжены.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Carter, T. Hawkes, “The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble group”, *J. Algebra*, **5**:2 (1967), 175–202.

[2] Л. А. Шеметков, “Ступенчатые формации групп”, *Матем. сб.*, **94**:4 (1974), 628–648.

[3] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Минск, 2003.

[4] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[5] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[6] R. Baer, “Classes of finite groups and their properties”, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115–187.

[7] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.

[8] O. Ore, “Contributions to the theory of groups of finite order”, *Duke Math. J.*, **5**:2 (1939), 431–460.

**С. Ф. Каморников**
Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины, Беларусь
*E-mail*: sfkamornikov@mail.ru

Поступило
30.08.2007