ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 440, № 3, с. 306–309

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542.4

ПРОЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП: РЕДУКЦИЯ К ПОДГРУППАМ ПРЕФРАТТИНИЕВА ТИПА

© 2011 г. С. Ф. Каморников, Л. А. Шеметков

Представлено академиком Ю.Л. Ершовым 24.01.2011 г.

Поступило 09.03.2011 г.

Значительным достижением в теории конечных разрешимых групп стало открытие $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-нормализаторов и $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп. Пусть G – конечная разрешимая группа. Как доказали Гашюц, Картер и Хоукс, упомянутые подгруппы существуют в G для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ (см. [1–4]). Каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G содержится в некотором ее $\mathfrak{F}$-проекторе; более того, как установлено в работе [5], $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G – это $\mathfrak{F}$-проектор нормализатора $N_G(\Sigma)$ силовского базиса Σ $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$.

Не всегда $\mathfrak{F}$-проектор содержится в $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппе. В настоящей работе мы доказываем, что если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка (в частности, насыщенная формация), то каждый $\mathfrak{X}$-проектор группы G содержится в некоторой ее $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-префраттиниевой подгруппе, где $b(\mathfrak{X})$ – Q-граница класса Шунка $\mathfrak{X}$. Это позволяет редуцировать понятие $\mathfrak{X}$-проектора к понятию $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-префраттиниевой подгруппы (см. теорему 4 ниже).

В работе используются определения и обозначения, принятые в [6, 7]. Наиболее часто встречающиеся понятия мы определяем по ходу изложения материала. Символ $N \lhd G$ означает, что N – нормальная подгруппа в G (случай $N = G$ не исключается). Под группой всегда подразумевается разрешимая конечная группа.

1. $\mathfrak{X}$-ПРОЕКТОРЫ

Напомним, что классом Шунка называется всякий примитивно замкнутый гомоморф, т.е. такой класс групп $\mathfrak{X}$, который обладает следующими свойствами:

1) если $G \in \mathfrak{X}$ и N – нормальная подгруппа в G, то $G/N \in \mathfrak{X}$;

2) если все примитивные фактор-группы группы G принадлежат $\mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.

Группа называется примитивной, если она обладает максимальной подгруппой с единичным ядром (см. [8]). Понятно, что если M – максимальная подгруппа группы G, то группа $G/\mathrm{Core}_G(M)$ примитивна. Класс всех примитивных групп будем обозначать через $\mathcal{P}$.

Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то класс $b(\mathfrak{X})$, состоящий из всех тех групп G, которые не принадлежат $\mathfrak{X}$, но для которых $G/N \in \mathfrak{X}$ для всех $1 \neq N \lhd G$, называется Q-границей класса $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что непустой гомоморф $\mathfrak{X}$ является классом Шунка тогда и только тогда, когда каждая группа из $b(\mathfrak{X})$ примитивна.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором (или $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой), если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{X}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathfrak{X}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Отметим, что для неразрешимых групп термины $\mathfrak{X}$-проектор и $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа не совпадают (см. [7]). Основные свойства $\mathfrak{X}$-проекторов сформулируем в виде теоремы. Для насыщенных формаций ее доказал Гашюц [1], а для примитивно замкнутых гомоморфов – Шунк [9].

Теорема 1. *Для любого непустого гомоморфа $\mathfrak{X}$ и любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *любые два $\mathfrak{X}$-проектора группы G сопряжены в G*;

2) *если H – $\mathfrak{X}$-проектор группы G и $N \lhd G$, то HN/N является $\mathfrak{X}$-проектором в G/N*;

3) *если R/N – $\mathfrak{X}$-проектор в G/N и H – $\mathfrak{X}$-проектор в R, то H – $\mathfrak{X}$-проектор в G*;

4) *если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка, то G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{X}$-проектором*.

Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений, Беларусь

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь

2. $\mathfrak{X}$-ПРЕФРАТТИНИЕВЫ ПОДГРУППЫ

Понятие префраттиниевой подгруппы как пересечения дополнений корон нефраттиниевых главных факторов группы ввел Гашюц в [2]. Такой подход в дальнейшем широко исследовался и многократно обобщался. Наиболее яркое развитие он получил в работе Хоукса [4], который для непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ рассмотрел дополнения корон не всех нефраттиниевых главных факторов, а лишь $\mathfrak{F}$-эксцентральных. Надо отметить, что требование к $\mathfrak{F}$ быть насыщенной формацией не является принципиальным. В качестве $\mathfrak{F}$ может выступать любой непустой класс групп, что отмечено, например, в [10].

Прежде чем сформулировать идею Хоукса, напомним некоторые определения. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$-центральным, если полупрямое произведение $[H/K](G/C_G(H/K))$ принадлежит $\mathfrak{X}$. Если же $[H/K](G/C_G(H/K))$ не принадлежит $\mathfrak{X}$, то главный фактор H/K называется $\mathfrak{X}$-эксцентральным.

Нам потребуются еще некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов. Пусть M – подгруппа, а H/K – нормальный фактор группы G. Говорят, что:

1) M является дополнением фактора H/K, если $HM = G$ и $M \cap H = K$ (в этом случае фактор H/K называется дополняемым);

2) M покрывает фактор H/K, если $MK \supseteq H$;

3) M изолирует фактор H/K, если $M \cap H \subseteq K$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. И пусть G – группа, в главном ряду которой имеется ровно n дополняемых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-префраттиниевой, если в G найдутся такие максимальные подгруппы $M_1, M_2, \ldots, M_n$, что $H = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$, причем для каждого главного ряда группы G подгруппы $M_1, M_2, \ldots, M_n$ изолируют различные дополняемые $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы этого ряда (если в G нет дополняемых $\mathfrak{F}$-эксцентральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой группы G считается сама G).

Основные свойства $\mathfrak{F}$-префраттиниевых подгрупп сформулируем в виде теоремы. Для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ она доказана Хоуксом в [4], а для произвольного класса $\mathfrak{F}$ приведена в [10].

Теорема 2. *Для любого непустого класса $\mathfrak{X}$ и любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *группа G обладает по крайней мере одной $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой*;

2) *любые две $\mathfrak{X}$-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G*;

3) *если H – $\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа группы G и $N \lhd G$, то HN/N – $\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа группы G/N*;

4) *$\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа H изолирует все дополняемые $\mathfrak{X}$-эксцентральные и покрывает все остальные главные факторы группы G.*

Обратимся теперь к предложенной в [11, 12] характеризации $\mathfrak{X}$-префраттиниевых подгрупп.

Пусть H – примитивная группа. Обозначим через $\Phi_H(G)$ пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \cong H$ (если в G нет фактор-групп, изоморфных H, то полагаем $\Phi_H(G) = G$). Через $F_H(G)$ обозначим полный прообраз подгруппы $\mathrm{Soc}(G/\Phi_H(G))$ группы $G/\Phi_H(G)$ в группе G. Следуя [11], секцию $F_H(G)/\Phi_H(G)$ назовем H-короной группы G и обозначим ее через $\mathrm{Cr}(G, H)$.

Запись $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ используется в дальнейшем для обозначения класса групп, порожденного группами $H_1, H_2, \ldots, H_n$. При этом всегда предполагается, что группы H_i и H_j не изоморфны при любых $i \neq j$.

Лемма 1 [11]. *Пусть H – примитивная группа. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi(G/\Phi_H(G)) = 1$;

2) $F_H(G)/\Phi_H(G) = N_1/\Phi_H(G) \times N_2/\Phi_H(G) \times \ldots \times N_t/\Phi_H(G)$, *где $N_i/\Phi_H(G)$ – дополняемая $\mathcal{P}\backslash(H)$-эксцентральная минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi_H(G)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$*;

3) *если M_i – дополнение главного фактора $N_i/\Phi_H(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, то $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t$ – $\mathcal{P}\backslash(H)$-префраттиниева подгруппа группы G.*

Лемма 2 [11]. *Пусть H – примитивная группа. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения*:

1) *H-корона $\mathrm{Cr}(G, H)$ дополняема в G*;

2) *любые два дополнения H-короны группы G сопряжены в G*;

3) *подгруппа S группы G является дополнением H-короны $\mathrm{Cr}(G, H)$ тогда и только тогда, когда S является $\mathcal{P}\backslash(H)$-префраттиниевой подгруппой группы G.*

Леммы 1 и 2 создают основу для конструирования $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппы группы G для любого непустого класса $\mathfrak{X}$.

Обозначим через $\mathcal{P}(G)$ класс всех групп, изоморфных примитивным фактор-группам группы G (если $G = 1$, то полагаем, что $\mathcal{P}(G) = \varnothing$).

Теорема 3 [11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый непустой класс групп. Если $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(G) \cap \mathfrak{F}$ и $\mathcal{P}(G)\backslash\mathfrak{X} = (H_1, H_2, \ldots, H_n)$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *подгруппа H группы G тогда и только тогда является $\mathfrak{F}$-префраттиниевой подгруппой, когда H является $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппой группы G*;

2) *если B_i – дополнение H_i-короны* $\mathrm{Cr}(G, H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то* $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n \cap G$ – $\mathfrak{F}$-*префраттиниева подгруппа группы G.*

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Покажем теперь, как можно для любого класса Шунка $\mathfrak{X}$ с помощью обобщенно префраттиниевых подгрупп построить $\mathfrak{X}$-проектор группы. Для этого нам понадобятся две следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка. Если $H \in b(\mathfrak{X})$, то каждое дополнение H-короны содержит по крайней мере один $\mathfrak{X}$-проектор группы G.*

Доказательство. Если H не принадлежит $\mathcal{P}(G)$, то $\Phi_H(G) = F_H(G) = G$. В этом случае дополнение H-короны $\mathrm{Cr}(G, H)$ совпадает с G, а значит, утверждение леммы верно.

Итак, H принадлежит $\mathcal{P}(G)$. Пусть L – дополнение H-короны $\mathrm{Cr}(G, H)$. Оно существует ввиду леммы 1. Покажем, что L содержит некоторый $\mathfrak{X}$-проектор группы G.

Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется, т.е. L не содержит ни одного $\mathfrak{X}$-проектора группы G.

Рассмотрим группу $G/\Phi_H(G)$. Ввиду леммы 1 $\Phi_H(G/\Phi_H(G)) = 1$. Поэтому $F_H(G/\Phi_H(G)) = F_H(G)/\Phi_H(G)$ и $L/\Phi_H(G)$ – дополнение к $F_H(G)/\Phi_H(G)$ в группе $G/\Phi_H(G)$.

Предположим, что $\Phi_H(G) \neq 1$. Тогда ввиду выбора группы G подгруппа $L/\Phi_H(G)$ содержит некоторый $\mathfrak{X}$-проектор $R/\Phi_H(G)$ группы $G/\Phi_H(G)$. Если D – $\mathfrak{X}$-проектор в R, то согласно теореме 1 подгруппа D является $\mathfrak{X}$-проектором группы G. При этом D содержится в L, противоречие.

Значит, $\Phi_H(G) = 1$. Ввиду леммы 1 $\Phi(G) = 1$ и поэтому $F_H(G) = F(G) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где на основании леммы 1 N_i – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы G для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ и, кроме того, $[N_i](G/C_G/(N)) \cong H$. Пусть M_i – максимальная подгруппа группы G, дополняющая подгруппу N_i ($i = 1, 2, \ldots, t$). Ввиду леммы 3.29 из [10] $G/\mathrm{Core}_G(M_i) \cong [N_i](G/C_G(N_i) \cong H$. Поскольку $H \in b(\mathfrak{X})$, то каждая максимальная подгруппа из H, имеющая единичное ядро, является $\mathfrak{X}$-проектором в H. Следовательно, ввиду изоморфизма $G/\mathrm{Core}_G(M_i) \cong H$ подгруппа $M_i/\mathrm{Core}_G(M_i)$ является $\mathfrak{X}$-проектором в $G/\mathrm{Core}_G(M_i)$.

Пусть D – $\mathfrak{X}$-проектор в G. Ввиду теоремы 1 для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ найдется элемент $x_i \in G$, такой что $M_i^{x_i}/\mathrm{Core}_G(M_i) = D\mathrm{Core}_G(M_i)/\mathrm{Core}(M_i)$, а значит, $M_i^{x_i} = D\mathrm{Core}_G(M_i)$. На основании леммы 1 $M_1^{x_1} \cap M_2^{x_2} \cap \ldots \cap M_t^{x_t}$ является $\mathcal{P}\backslash(H)$-префраттиниевой подгруппой в G. При этом $D \subseteq M_1^{x_1} \cap M_2^{x_2} \cap \ldots \cap M_t^{x_t}$. Ввиду леммы 2 $M_1^{x_1} \cap M_2^{x_2} \cap \ldots \cap M_t^{x_t}$ – дополнение подгруппы $F_H(G)$ и, кроме того, любые два дополнения подгруппы $F_H(G)$ сопряжены в G. Отсюда получаем, что найдется элемент $x \in G$, такой что $L = (M_1^{x_1} \cap M_2^{x_2} \cap \ldots \cap M_t^{x_t})^x$. Но тогда L содержит $\mathfrak{X}$-проектор D^x группы G. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка. Если H – $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-префраттиниева подгруппа группы G, то H содержит по крайней мере один $\mathfrak{X}$-проектор группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}(G) \cap b(\mathfrak{X}) = (H_1, H_2, \ldots, H_n)$. Тогда ввиду леммы 2 и теоремы 3 подгруппа H представима в виде $H = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n \cap G$, где B_i – $\mathcal{P}\backslash(H_i)$-префраттиниева подгруппа группы G, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если D – $\mathfrak{X}$-проектор группы G, то на основании леммы 3 и теоремы 1 найдутся элементы $x_i \in G$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), такие что $D \subseteq B_i^{x_i}$. Снова применяя теорему 3, получаем, что D содержится в $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-префраттиниевой подгруппе $B_1^{x_1} \cap B_2^{x_2} \cap \ldots \cap B_t^{x_t} \cap G$ группы G. А поскольку на основании теоремы 2 любые две $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G, то найдется элемент $x \in G$, такой что $H = (B_1^{x_1} \cap B_2^{x_2} \cap \ldots \cap B_t^{x_t} \cap G)^x$. Но тогда H содержит $\mathfrak{X}$-проектор D^x группы G. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Шунка. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{X}$-проектором группы G тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия*:

1) $H \in \mathfrak{X}$;

2) *существует цепь* $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$, *в которой* H_i – $\mathcal{P}\backslash b(\mathfrak{X})$-*префраттиниева подгруппа группы* H_{i-1} *для любого* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Применим индукцию по длине цепи

$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k = H$.

Если $k = 0$, то $G \in \mathfrak{X}$, а значит, $H = G$ есть $\mathfrak{X}$-проектор в G, т.е. в этом случае теорема верна. Пусть в дальнейшем $k > 0$. Рассмотрим подгруппу H_1 и цепь $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = H$. Так как H_1 удовлетворяет всем условиям теоремы, а длина цепи $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k = H$ меньше k, то ввиду предположения индукции H есть $\mathfrak{X}$-проектор подгруппы H_1. На основании леммы 4 подгруппа H_1 содержит $\mathfrak{X}$-проектор D группы G, который, очевидно, является $\mathfrak{X}$-проектором группы H_1. Ввиду теоремы 1 подгруппы H и D сопряжены в G. Следовательно, H – это $\mathfrak{X}$-проектор группы G. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaschütz W.* // Math. Ztschr. 1963. Bd. 80. № 4. S. 300–305.
2. *Gaschütz W.* // Arch. Math. 1962. Bd. 13. № 3. S. 418–426.
3. *Carter R., Hawkes T.* // J. Algebra. 1967. V. 5. № 2. P. 175–202.
4. *Hawkes T.* In: Proc. Intern. Conf. Theory of Groups. Canberra, 1965. № 5. P. 145–150.
5. *Шеметков Л.А.* // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 684–715.
6. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. B.; N.Y.: Walter de Gruyter, 1992. 897 p.
8. *Baer R.* // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
9. *Schunck H.* // Math. Ztschr. 1967. Bd. 97. № 4. S. 326–330.
10. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 254 с.
11. *Каморников С.Ф., Шеметков Л.А.* // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 5. С. 591–614.
12. *Каморников С.Ф.* // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 6. С. 1310–1318.