С. Ф. Каморников, Л. П. Авдашкова, Радикальные дистрибутивные функторы, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 1, 91–97

DOI: 10.4213/mzm922

Математические заметки

том 68 выпуск 1 июль 2000

УДК 512.542

РАДИКАЛЬНЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ ФУНКТОРЫ

С. Ф. Каморников, Л. П. Авдашкова

Исследуются свойства дистрибутивных функторов на решетке субнормальных подгрупп. Выделяется класс радикальных дистрибутивных функторов, устанавливается связь таких функторов с классами Фиттинга, описываются все классы Фиттинга, индуцирующие радикальный дистрибутивный функтор.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. При изучении перестановочных свойств субнормальных подгрупп [1] и исследовании подгруппового и нормального строения конечных групп с системой косубнормальных подгрупп [2] существенным образом используются технические возможности дистрибутивных функторов, т.е. таких подгрупповых функторов, которые согласованы с изоморфизмами групп и индуцируют верхний эндоморфизм на решетке субнормальных подгрупп каждой группы.

В последнее время значительный прогресс достигнут в части исследования дистрибутивных функторов, перестановочных с гомоморфизмами групп (см., например, работы [3], [4], где такие функторы называются *операторами Виландта*). В частности, в [4] установлена тесная связь этих функторов с формациями Фиттинга и показанно, что действие их на каждой группе заключается в выделении ее $\mathfrak{F}$-корадикала для некоторой формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. Таким образом, в [4] описание операторов Виландта сведено к описанию формаций Фиттинга, обладающих тем свойством, что $\langle H,K\rangle^{\mathfrak{F}} = \langle H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}}\rangle$ для всех $H, K \in \mathrm{sn}(G)$.

Однако не все дистрибутивные функторы перестановочны с гомоморфизмами групп. Первый пример таких функторов построен Виландтом в [2]. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс всех простых неабелевых групп, $\mathfrak{H}$ – класс всех тех групп, которые представимы в виде конечных прямых произведений групп из класса $\mathfrak{X}$. Виландт [2] показал, что отображение Θ, сопоставляющее каждой группе ее наибольшую нормальную $\mathfrak{H}$-подгруппу, задает дистрибутивный функтор.

Этот пример приводит нас к идее радикальных дистрибутивных функторов, которые и изучаются в настоящей работе.

2. Постановка задачи. В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в книгах [5], [6]. Следуя Виландту [2], *дистрибутивным функтором* будем называть отображение Θ, сопоставляющее каждой группе G ее некоторую подгруппу $\Theta(G)$ и обладающее следующими свойствами:

1) $f(\Theta(G)) = \Theta(f(G))$ для любого изоморфизма f группы G;
2) $\Theta(\langle X,Y\rangle) = \langle\Theta(X),\Theta(Y)\rangle$ для любых $X, Y \in \mathrm{sn}(G)$.

Дистрибутивный функтор Θ называется *радикальным*, если выполняется условие

3) $\Theta(X) = X \cap \Theta(G)$ для любой подгруппы $X \in \mathrm{sn}(G)$.

Существует прямая зависимость между радикальными дистрибутивными функторами и классами Фиттинга. Употребление слова "радикальный" здесь не случайно. Оно отражает связь радикальных функторов с радикальными классами. Напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называется *радикальным* или *классом Фиттинга*, если он является нормально наследственным, т.е. из $G \in \mathfrak{X}$ и из того, что $G = AB$, где A и B – нормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы из G, всегда следует $G \in \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то произведение всех нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп группы G называется ее $\mathfrak{X}$-*радикалом* и обозначается через $G_{\mathfrak{X}}$.

Теорема 2.1. *Пусть Θ – радикальный дистрибутивный функтор. Тогда*

1) *множество $\mathfrak{F} = \{H \mid \Theta(H) = H\}$ является классом Фиттинга;*

2) *для любой группы G подгруппа $\Theta(G)$ совпадает с ее $\mathfrak{F}$-радикалом $G_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Так как функтор Θ обладает свойством 1), множество $\mathfrak{F}$ является классом, т.е. вместе с каждой своей группой G содержит все группы, изоморфные G.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$, т.е. $\Theta(G) = G$. Если N – нормальная подгруппа группы G, то, учитывая свойство 3), имеем $\Theta(N) = N \cap \Theta(G) = N \cap G = N$. Следовательно, $N \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс.

Пусть теперь N, K – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы $G = NK$. Так как $\Theta(N) = N$, $\Theta(K) = K$, то

$$\Theta(G) = \Theta(NK) = \Theta(\langle N, K\rangle) = \langle \Theta(N), \Theta(K)\rangle = \langle N, K\rangle = G.$$

Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, из определения класса $\mathfrak{F}$ имеем $\Theta(G_{\mathfrak{F}}) = G_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, по свойству 3) оператора Θ имеем $\Theta(G_{\mathfrak{F}}) = G_{\mathfrak{F}} \cap \Theta(G)$. Отсюда $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap \Theta(G)$. Итак, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Theta(G)$. Ввиду свойства 3) имеем $\Theta(\Theta(G)) = \Theta(G) \cap \Theta(G) = \Theta(G)$, т.е. $\Theta(G) \in \mathfrak{F}$. Ввиду свойства 1) $\Theta(G)$ является нормальной подгруппой группы G. Теперь из определения $\mathfrak{F}$-радикала получаем $\Theta(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $G_{\mathfrak{F}} = \Theta(G)$. Теорема доказана.

Теорема 2.1 связывает с каждым радикальным дистрибутивным функтором Θ класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \{H \mid \Theta(H) = H\}$ и показывает, что действие Θ на группе заключается в выделении ее $\mathfrak{F}$-радикала.

Обратно, каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует функция $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}\colon G \to G_{\mathfrak{F}}$, которая удовлетворяет условиям 1) и 3). Если она также удовлетворяет условию 2), то $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ – радикальный дистрибутивный функтор.

Таким образом, каждый радикальный дистрибутивный функтор Θ имеет вид $\Theta = \mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ для некоторого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и задача описания радикальных дистрибутивных функторов сводится к описанию классов Фиттинга, обладающих тем свойством, что

$$\langle H, K\rangle_{\mathfrak{F}} = \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle \qquad (*)$$

для всех $H, K \in \mathrm{sn}(G)$. Ниже в теореме 4.1 мы описываем все классы Фиттинга, которые обладают указанным свойством.

3. Вспомогательные леммы. Доказательство следующей леммы можно найти в [6].

ЛЕММА 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, G – группа. Тогда*

а) *если $N \in \mathrm{sn}(G)$, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$;*

в) *если $N_1, N_2, \dots, N_t$ – нормальные подгруппы группы $G = N_1 N_2 \cdots N_t$, то*

$$G_{\mathfrak{F}} \Big/ \Big(\prod_{i=1}^{t} (N_i)_{\mathfrak{F}} \Big) \subseteq Z\Big(G \Big/ \prod_{i=1}^{t} (N_i)_{\mathfrak{F}} \Big).$$

ЛЕММА 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов. Если $G = HK$, где H и K – нормальные подгруппы из G, то $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 3.1 $H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G_{\mathfrak{F}} / H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} \subseteq Z(G / H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}})$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и все композиционные факторы $G_{\mathfrak{F}}$ неабелевы, то $G_{\mathfrak{F}} / H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} = 1$, т.е. $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов. Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G и $K \subseteq N_G(H)$. Тогда $(HK)_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности рассуждений, можем считать $G = HK$. Применим индукцию по длине $j(HK - K)$ композиционной $(HK - K)$-цепи. Если $j(HK - K) = 0$, то $HK = K$, т.е. $H \subseteq K$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является нормально наследственным, то $H_{\mathfrak{F}} \subseteq K_{\mathfrak{F}}$. Отсюда имеем $G_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}}$.

Предположим, что $t = j(HK - K) > 0$. Будем считать, что лемма верна для всех тех субнормальных подгрупп X и Y группы G, которые удовлетворяют условиям $Y \subseteq N_G(X)$ и $j(XY - Y) < t$. Пусть $HK = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_t = K$ – композиционная $(HK - K)$-цепь. Рассмотрим группу K_1. Так как $K \subseteq K_1 \subseteq HK$, ввиду тождества Дедекинда $K(K_1 \cap H) = K_1 \cap KH = K_1$. Кроме того, $K \subseteq N_K(K_1 \cap H)$ и $j(K_1 - K) = t - 1 < t$. Следовательно, ввиду предположения индукции

$$(K_1)_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}} (K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$, то

$$H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} (K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} (K_1)_{\mathfrak{F}}.$$

Ввиду леммы 3.2 имеем $G_{\mathfrak{F}} = (HK_1)_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} (K_1)_{\mathfrak{F}}$. Отсюда следует, что $H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов. Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G. Если $HK = KH$, то $(HK)_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Очевидно, подгруппа K субнормальна в HK. Применим индукцию по длине $j(HK-K)$ композиционной $(HK-K)$-цепи. Ввиду леммы 3.3 $(HK)_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}K_{\mathfrak{F}}$, если $j(HK-K) < 1$.

Итак, считаем в дальнейшем, что лемма верна для субнормальных подгрупп X и Y группы G таких, что $j(XY-Y) < m$. Пусть

$$HK = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_m = K$$

– композиционная $(HK-K)$-цепь. Рассмотрим группу K_1. Из $HK = KH$ и $K \subseteq K_1$ следует ввиду тождества Дедекинда, что $K(K_1 \cap H) = K_1 \cap KH = K_1$. Так как $j(K_1 - K) = m-1 < m$, по индукции $(K_1)_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}}(K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}}$. Из нормальной наследственности класса $\mathfrak{F}$ следует, что $(K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}} \subseteq H_{\mathfrak{F}}$. Следовательно,

$$(K_1)_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}}(K_1 \cap H)_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}}.$$

Очевидно, $KH = K_1H$. Ввиду леммы 3.3 $(K_1H)_{\mathfrak{F}} = (K_1)_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}}$. Значит,

$$(HK)_{\mathfrak{F}} = (HK_1)_{\mathfrak{F}} = (K_1)_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}}H_{\mathfrak{F}}.$$

Лемма доказана.

Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то, следуя [6], через $E\mathfrak{X}$ будем обозначать класс всех групп, обладающих субнормальными рядами, все факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых групп, то $E\mathfrak{X}$ – это класс всех тех групп, все композиционные факторы которых входят в $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что в этом случае $E\mathfrak{X}$ – формация Фиттинга.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс простых неабелевых групп. Если $\mathfrak{F} = E\mathfrak{X}$, то $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ – радикальный дистрибутивный функтор.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда найдется хотя бы одна группа, обладающая субнормальными подгруппами, для которых не выполняется равенство $(*)$. Пусть G – группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда в G найдутся субнормальные подгруппы H и K такие, что $G = \langle H, K\rangle$ и $G_{\mathfrak{F}} \neq \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $N \in \mathfrak{F}$. Тогда ввиду выбора группы G имеем

$$(G/N)_{\mathfrak{F}} = \langle (HN/N)_{\mathfrak{F}}, (KN/N)_{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Так как класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно расширений, то

$$(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N, \qquad (HN/N)_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}N/N, \qquad (KN/N)_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}}N/N.$$

Отсюда следует, что $G_{\mathfrak{F}} = \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle N$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то

$$G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}K_{\mathfrak{F}}N = (H \cap G_{\mathfrak{F}})(K \cap G_{\mathfrak{F}})N.$$

Так как подгруппа N характеристически проста, то $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, где N_i – субнормальные неабелевы простые подгруппы группы G. Ввиду леммы 1.8 из [2] подгруппа N_i содержится либо в H, либо в K для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $N \subseteq (H \cap G_{\mathfrak{F}})(K \cap G_{\mathfrak{F}})$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}K_{\mathfrak{F}}$. Противоречие.

2. Пусть все минимальные нормальные подгруппы группы G не принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда $G_{\mathfrak{F}} = 1$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является нормально наследственным, то $H_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{F}} = 1$. Таким образом, $G_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{F}}K_{\mathfrak{F}}$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга такой, что каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов. Тогда* $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ *– радикальный дистрибутивный функтор.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, обладающая субнормальными подгруппами, для которых не выполняется равенство $(*)$. Тогда в G найдутся субнормальные подгруппы H и K такие, что $G = \langle H, K\rangle$, $G_{\mathfrak{F}} \neq \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle$. Пусть $\mathfrak{H} = E\mathfrak{F}$. По лемме 3.5 имеем $G_{\mathfrak{H}} = \langle H_{\mathfrak{H}}, K_{\mathfrak{H}}\rangle$. Очевидно,

$$G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}, \qquad H_{\mathfrak{F}} = (H_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}, \qquad K_{\mathfrak{F}} = (K_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}.$$

Если $G_{\mathfrak{H}} \neq G$, то ввиду выбора группы G имеем

$$G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}} = \langle (H_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}, (K_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{F}}\rangle = \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle.$$

Противоречие.

Значит, $G_{\mathfrak{H}} = G$, т.е. $G \in \mathfrak{H}$. В этом случае $H = H'$, $K = K'$. По теореме Виландта из [7] подгруппы H и K перестановочны. Значит, по лемме 3.4 $G_{\mathfrak{F}} = \langle H_{\mathfrak{F}}, K_{\mathfrak{F}}\rangle$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть A и H – группы такие, что $|A| = p$, а H имеет нормальную подгруппу R индекса p. Тогда группа $G = A \times H$ содержит нормальную подгруппу S, обладающую следующими свойствами:*

1) $G = HS$;
2) $H \cap S = R$;
3) $H \simeq S$;
4) $A \cap S = 1$.

Доказательство. Из условия леммы следует, что $H/R = \langle xR\rangle$ для некоторого p-элемента $x \in G$. Тогда

$$H = R \cup xR \cup \cdots \cup x^{p-1}R = \langle x\rangle R \qquad (**)$$

Пусть $A = \langle y\rangle$. Рассмотрим группу $S = \langle xy\rangle R$. Очевидно, $S \triangleleft G$.

Допустим, что $S = H$. Тогда из $x \in H$ и $xy \in H$ следует, что $y \in H$. Но это противоречит тому, что $A \cap H = 1$. Если предположить, что $S = R$, то $xy \in R$, а значит, $y \in x^{p-1}R \subseteq H$. Снова приходим к противоречию. Если $S = G$, то $x \in S$. Тогда $S = \langle y\rangle \times R$, а значит, из свойств прямых произведений заключаем, что $x \in R$ и $H = R$. Полученное противоречие показывает, что S – максимальная подгруппа группы G, отличная от H. Поэтому $G = HS$.

Так как $R \subseteq H$, $R \subseteq S$ и подгруппа R максимальна в H и S, то из $H \neq S$ следует, что $H \cap S = R$.

Допустим, что $A \cap S \neq 1$. Тогда из $|A| = p$ имеем $A \subseteq S$. Из $xy \in S$ и $y \in S$ следует, что $x \in S$. Но тогда $S = H$ и мы приходим к противоречию.

Покажем теперь, что $H \simeq S$. Из $(**)$ следует, что любой элемент группы H представим в виде $x^k r$, где $0 \leqslant k < p$, $r \in R$. Рассмотрим отображение $f\colon H \to S$ такое, что $f(x^k r) = (xy)^k r$. Тогда, с одной стороны, на основании $(**)$ имеем

$$f((x^k r_1)(x^l r_2)) = f(x^{k+l} r_3) = (xy)^{k+l} r_3.$$

С другой стороны, так как $y \in Z(G)$, то

$$f((x^k r_1)(x^l r_2)) = (xy)^k r_1 (xy)^l r_2 = (x^k r_1)(x^l r_2) y^{k+l} = x^{k+l} r_3 y^{k+l} = (xy)^{k+l} r_3.$$

Следовательно, f – гомоморфизм. Пусть $z \in \mathrm{Ker}\, f$. Тогда из $z \in H$ имеем, что $z = x^k r$ для некоторых $0 \leqslant k < p$, $r \in R$. С другой стороны, $f(z) = (xy)^k r = y^k x^k r = 1$. Так как $G = A \times H$, то любой элемент g из G единственным образом представим в виде $g = ah$, где $a \in A$, $h \in H$. Следовательно, из $y^k x^k r = 1$ имеем, в частности, что $x^k r = z = 1$. Таким образом, $\mathrm{Ker}\, f = 1$, а значит, f – изоморфизм. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы легко следует из леммы 3.7 (см. также [6, с. 565]).

Лемма 3.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если группа $G \in \mathfrak{F}$ содержит композиционный фактор порядка p, то $\mathfrak{F}$ содержит циклическую группу порядка p.*

4. Основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ – радикальный дистрибутивный функтор, когда либо $\mathfrak{F}$ – класс всех групп, либо каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – собственный подкласс класса всех групп. Пусть H – группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то H имеет единственную максимальную нормальную подгруппу R. Очевидно, $R = H_{\mathfrak{F}}$.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ содержит некоторую группу, имеющую композиционный фактор порядка p. Тогда ввиду леммы 3.8 группа A порядка p входит в $\mathfrak{F}$. Возможны три случая.

1. Пусть H/R – абелева группа и $H/R \in \mathfrak{F}$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что $H/R \simeq A$.

Рассмотрим группу $G = A \times H$. Тогда ввиду леммы 3.7 в G найдется нормальная подгруппа S такая, что $G = SH$, $H \cap S = R$, $H \simeq S$ и $A \cap S = 1$. Так как $H_{\mathfrak{F}} = R$, $H \simeq S$ и $R \subseteq S$, то $S_{\mathfrak{F}} = R$. Поэтому $H_{\mathfrak{F}} S_{\mathfrak{F}} = R$. С другой стороны, так как $A \in \mathfrak{F}$, то $G_{\mathfrak{F}} \supseteq RA$. Таким образом, $G_{\mathfrak{F}} \neq H_{\mathfrak{F}} S_{\mathfrak{F}}$ и мы приходим к противоречию с условием теоремы.

2. Пусть H/R – абелева группа и H/R не входит в $\mathfrak{F}$. Тогда $|H| = q$ для некоторого простого q, отличного от p. Пусть $H_1 = H \,\mathrm{wr}\, A = [K]A$, где K – база регулярного сплетения $H \,\mathrm{wr}\, A$. Если $(H_1)_{\mathfrak{F}} \neq 1$, то из $|H_1| = q^p p$ следует, что $(H_1)_{\mathfrak{F}} = A$. Но тогда A – нормальная подгруппа в H_1, что невозможно. Значит, $(H_1)_{\mathfrak{F}} = 1$.

Рассмотрим теперь группу $G_1 = A \times H_1$. Ввиду леммы 3.7 в G_1 найдется нормальная подгруппа S_1 такая, что $G_1 = S_1 H_1$, $H_1 \cap S_1 = K$, $S_1 \simeq H_1$ и $A \cap S_1 = 1$. В этом случае $(S_1)_{\mathfrak{F}} = 1$ и $(G_1)_{\mathfrak{F}} \supseteq A$. Поэтому $(G_1)_{\mathfrak{F}} \neq (H_1)_{\mathfrak{F}} (S_1)_{\mathfrak{F}} = 1$. Снова пришли к противоречию.

3. Пусть H/R – неабелева группа. Пусть $H_2 = H \,\mathrm{wr}\, A = [K_1]A$, где K_1 – база регулярного сплетения $H \,\mathrm{wr}\, A$. Так как K_1 – прямое произведение p копий L_i группы H, ввиду леммы 3.1 $(K_1)_{\mathfrak{F}} = (L_1)_{\mathfrak{F}} \times \cdots \times (L_p)_{\mathfrak{F}}$, где $(L_i)_{\mathfrak{F}} \simeq R$. Допустим, что $(H_2)_{\mathfrak{F}} \neq (K_1)_{\mathfrak{F}}$. Тогда из $(H_2)_{\mathfrak{F}} \cap K_1 = (K_1)_{\mathfrak{F}}$ следует, что $|(H_2)_{\mathfrak{F}}/(K_1)_{\mathfrak{F}}| = p$. Поэтому группа $H_2/(K_1)_{\mathfrak{F}}$ содержит нормальную подгруппу порядка p, что невозможно, так как $H_2/(K_1)_{\mathfrak{F}} \simeq (H/R) \,\mathrm{wr}\, A$. Значит, $(H_2)_{\mathfrak{F}} = (K_1)_{\mathfrak{F}}$.

Рассмотрим группу $G_2 = A \times H_2$. Ввиду леммы 3.7 в G_2 найдется нормальная подгруппа S_2 такая, что $G_2 = S_2 H_2, S_2 \cap H_2 = K_1, H_2 \simeq S_2$ и $A \cap S_2 = 1$. Поэтому из $(K_1)_{\mathfrak{F}} \subseteq S_2$ следует, что $(S_2)_{\mathfrak{F}} = (K_1)_{\mathfrak{F}}$. Таким образом, $(S_2)_{\mathfrak{F}}(H_2)_{\mathfrak{F}} = (K_1)_{\mathfrak{F}}$, а $(G_2)_{\mathfrak{F}} \supseteq A \times (K_1)_{\mathfrak{F}}$. Полученное противоречие и завершает доказательство первой части теоремы, т.е. если $\mathrm{rad}_{\mathfrak{F}}$ – радикальный дистрибутивный функтор, то либо $\mathfrak{F}$ – класс всех групп, либо каждая группа из $\mathfrak{F}$ не имеет абелевых композиционных факторов. Обратное утверждение следует из леммы 3.6. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Wielandt H. Vertauschbare nachinvariante Untergruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1957. V. 21. №1–2. P. 55–62.
[2] Wielandt H. Über das Erzeugnis paarweise kosubnormaler Untergruppen // Arch. Math. 1980. V. 35. №1–2. P. 1–7.
[3] Каморников С. Ф. О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №2. С. 71–77.
[4] Каморников С. Ф., Шеметков Л. А. О корадикалах субнормальных подгрупп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. №5. С. 493–513.
[5] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
[6] Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
[7] Wielandt H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen // Math. Z. 1939. V. 45. P. 209–244.

(С. Ф. Каморников) Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
(Л. П. Авдашкова) Гомельский кооперативный институт

Поступило 28.12.1998
Исправленный вариант 03.02.2000