ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542

К σ-ПРОБЛЕМЕ КЕГЕЛЯ — ВИЛАНДТА

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Для произвольного разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел приводится достаточное условие σ-субнормальности подгруппы в конечной группе. Доказывается, что σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение в классе всех конечных групп, у которых все неабелевы композиционные факторы являются либо знакопеременными группами, либо спорадическими группами, либо лиевыми группами ранга 1.

Ключевые слова: конечная группа, σ-субнормальная подгруппа, σ-проблема Кегеля — Виландта, холлова подгруппа, полное холлово множество.

S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. On the Kegel–Wielandt σ-problem.

For an arbitrary partition σ of the set $\mathbb{P}$ of all primes, a sufficient condition for the σ-subnormality of a subgroup in a finite group is given. It is proved that the Kegel–Wielandt σ-problem has a positive solution in the class of all finite groups all of whose nonabelian composition factors are alternating groups, sporadic groups, or Lie groups of rank 1.

Keywords: finite group, σ-subnormal subgroup, Kegel–Wielandt σ-problem, Hall subgroup, complete Hall set.

MSC: 20D20, 20D35

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-121-129

К 70-летию
Александра Алексеевича Махнева

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Кегель в 1962 г. [1] ввел понятие p-субнормальной подгруппы (p — некоторое простое число) как подгруппы, пересечение которой с каждой силовской p-подгруппой группы является ее силовской подгруппой. В этой же работе он сформулировал следующую гипотезу: *подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G тогда и только тогда, когда она p-субнормальна для любого простого числа p.* Виландт (см. [2]) в 1980 г. включил эту гипотезу в список наиболее важных проблем, требующих решения после завершения классификации. Поэтому эту гипотезу называют *проблемой Кегеля — Виландта.*

Ее полное решение, опирающееся на классификацию конечных простых групп, получено Кляйдманом в 1991 г. [3]. Другое доказательство проблемы Кегеля — Виландта (с позиций силовской p-транзитивности) предложено в работе [4].

Результат Кляйдмана инициировал соответствующий вопрос для σ-субнормальных подгрупп, который под номером 19.86 вошел в [5] и получил название σ-проблемы Кегеля — Виландта.

σ-Проблема Кегеля — Виландта. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и G — конечная группа, обладающая σ_i-холловой подгруппой для каждого $i \in I$. И пусть H — такая подгруппа группы G, что $H \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из H*

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

для любого $i \in I$ и всякой σ_i-холловой подгруппы S_i группы G. Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G?

Решить σ-проблему Кегеля — Виландта — значит либо ответить на поставленный в ней вопрос для любого разбиения σ, либо доказать, что существуют некоторое разбиение σ и группа G, для которых подгруппа H не является σ-субнормальной в G при выполнении условий σ-проблемы Кегеля — Виландта.

Концепция σ-субнормальной подгруппы, предложенная в [6], базируется на следующем определении.

Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ_j-группой для некоторого $j \in I$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$. Поэтому для минимального разбиения σ-проблема Кегеля — Виландта превращается в проблему Кегеля — Виландта.

Отметим, что кроме минимального разбиения σ-проблема Кегеля — Виландта к настоящему времени получила положительное решение и для некоторых других частных разбиений σ. Так, например, в [7] она решена для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, где p — простое число, а в [8] — для произвольного бинарного разбиения $\sigma = \{\{\pi\}, \{\pi\}'\}$, где π — некоторое множество простых чисел.

Более общей по отношению к σ-проблеме Кегеля — Виландта (см. [7]) является следующая *обобщенная σ-проблема Кегеля — Виландта*, что связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ σ_i-холловых подгрупп $(i = 1, 2, \ldots, k)$ группы G называется *полным холловым множеством типа* σ группы G, если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \ldots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, \ldots, S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$. Группа G называется *σ-полной*, если она обладает по крайней мере одним полным холловым множеством типа σ.

Будем говорить, что полное холлово множество $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \ldots, k$.

Обобщенная σ-проблема Кегеля — Виландта. *Пусть σ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ конечной группы G. И пусть H — такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что H является σ-субнормальной в G?*

Если в σ-проблеме Кегеля— Виландта требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G, то в обобщенной σ-проблеме Кегеля — Виландта речь идет только о полных холловых множествах Σ^g $(g \in G)$ для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G. Поэтому положительное решение обобщенной проблемы всегда приводит к решению σ-проблемы Кегеля — Виландта.

В [7] доказано, что минимальным контрпримером к σ-проблеме Кегеля — Виландта является пара (G, H), где G — простая неабелева группа, а H — ее подгруппа, являющаяся простой неабелевой группой. Таким образом, решение σ-проблемы Кегеля — Виландта сводится по сути к проверке в простых группах условий этой проблемы.

В работах [7; 9–11] показано, что в минимальном контрпримере (G, H) группа G не может быть знакопеременной группой, спорадической группой, группой Судзуки и группой Ри.

В данной работе доказывается, что $G \notin \{PSL_2(q), PSU_3(q)\}$.

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы, устанавливающей довольно широкий класс конечных групп с заданной системой композиционных факторов, в котором обобщенная σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение для произвольного разбиения σ.

Теорема 1. *Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, G — σ-полная группа, все неабелевы композиционные факторы которой являются либо знакопеременными группами, либо спорадическими группами, либо лиевыми группами ранга* 1. *Если Σ — полное холлово множество типа σ группы G, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.*

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех групп, у которых все неабелевы композиционные факторы являются либо знакопеременными группами, либо спорадическими группами, либо лиевыми группами ранга 1. Из теоремы 1 следует, что в классе $\mathfrak{K}$ обобщенная σ-проблема Кегеля — Виландта (как и σ-проблема Кегеля — Виландта) имеет положительное решение для любого разбиения σ.

1. Определения и предварительные результаты

В работе использованы стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [11]. Терминология теории σ-субнормальных подгрупп приведена в работе [6]. Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [13, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Будем использовать также следующие обозначения:

– если p — некоторое простое число, то $Syl_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G и G_p — силовская p-подгруппа группы G;

– если подгруппа H p-субнормальна в G, то пишем $H \leq_p G$;

– если π — некоторое простое число, то $Hall_\pi(G)$ — множество всех π-холловых подгрупп группы G и G_π — холлова π-подгруппа группы G;

– если $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — разбиение множества всех простых чисел и n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) | i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

– $\sigma(G) = \sigma(|G|)$;

– $I(G)$ — множество всех инволюций группы G.

Будем описывать расширения групп следующим образом:

– $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;

– $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Если A и B — подгруппы порядка n и m соответственно, то с учетом изложенного понятно обозначение $n : m$.

Будем говорить, что σ-полная группа $G \in \mathfrak{K}$ является *контрпримером к теореме* 1, если она обладает подгруппой H такой, что для некоторого полного холлова множества Σ типа σ и любого элемента $g \in G$ система Σ^g редуцируется в подгруппу H, но H не является σ-субнормальной в G. Если, кроме того, сумма $|G| + |H|$ минимальна, то пару (G, H) назовем *минимальным контрпримером к теореме* 1.

Следующая лемма устанавливает строение минимального контрпримера к теореме 1 и сводит ее доказательство к анализу строения холловых подгрупп простых неабелевых групп.

Лемма 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Если (G, H) — минимальный контрпример к теореме 1, то G и H — простые неабелевы группы. Кроме того, G — либо знакопеременная группа, либо спорадическая группа, либо лиева группа ранга* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (G, H) — минимальный контрпример к теореме 1. Тогда (G, H) — минимальный контрпример к обобщенной σ-проблеме Кегеля — Виландта. Ввиду леммы 2.4 из [7] G и H — простые неабелевы группы. Так как $G \in \mathfrak{K}$, то G — либо знакопеременная группа, либо спорадическая группа, либо лиева группа ранга 1.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — простая неабелева группа и H — такая ее подгруппа, что $|H|$ делится на p и $H \leq_p G$ для некоторого простого числа $p \geq 5$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $H = G$;

2) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, *где* $n = sp^a > p$ *и* $1 \leq s < p$;

3) $G \cong U_3(5)$, $H \cong A_7$ *и* $p = 5$;

4) $G \cong HS$, $H \cong M_{22}$ *и* $p = 5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из теоремы 1.4 работы [4]. □

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа группы G и $S \in Hall_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел. Если $S_p \trianglelefteq S$ для некоторого $p \in \pi$ и $S^g \cap H \in Hall_\pi(H)$ для любого $g \in G$, то $H \leq_p G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \in Syl_p(G)$. По теореме Силова справедливо равенство $P = S_p^x$ для некоторого $x \in G$. Из условия леммы следует, что $S^x \cap H$ — π-холлова подгруппа из H. Пусть $P_1 \in Syl_p(S^x \cap H)$. Очевидно, P_1 — силовская p-подгруппа из H. Отсюда и из того, что $P = S_p^x$ — единственная силовская p-подгруппа в S^x, по теореме Силова имеем равенство $P \cap H = P_1$, т. е. $P \cap H$ — силовская p-подгруппа в H. Таким образом, $H \leq_p G$.

Лемма доказана.

Справедливо утверждение, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 4. *Пусть n — натуральное число, большее 1. Тогда справедливы следующие утверждения: $(n-1, n+1) \in \{1, 2\}$, $(n-1, n^2-n+1) = 1$ и $(n+1, n^2-n+1) \in \{1, 3\}$.*

2. Доказательство теоремы 1

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — произвольное полное холлово множество группы G типа σ и подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G, то согласно [6, лемма 2.6] $H \cap S_i^g$ — σ_i-холлова подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ и каждого $g \in G$, т. е. полное холлово множество Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть (G, H) — минимальный контрпример к теореме 1. Тогда ввиду леммы 1 G и H — простые неабелевы группы. Кроме того, ввиду теоремы 1 из [11] либо $G \cong PSL_2(q)$, либо $G \cong PSU_3(q)$.

Пусть $\sigma(G) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \cdots \cup \sigma_k$, $k \geq 2$ и $G \cong PSL_2(q)$, где $q = p^n$ для некоторого простого числа p.

Рассмотрим отдельно случаи $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$ и $p \geq 7$.

1. Пусть $p = 2$. Поскольку $PSL_2(5) \cong SL_2(4)$, то $H \in \{SL_2(2^m)\}$, где $m \geq 2$ и m делит n. Силовские 2-подгруппы группы G являются элементарными абелевыми TI-подгруппами порядка 2^n. Пусть $2 \in \sigma_1$. Тогда S_1 содержится в подгруппе Бореля, являющейся 2-замкнутой группой Фробениуса. Число силовских 2-подгрупп группы G равно $2^n + 1$. Каждая силовская 2-подгруппа группы G содержится в точности в одной холловой подгруппе S_1^g для некоторого $g \in G$. Каждая силовская 2-подгруппа из H содержится в единственной силовской 2-подгруппе группы G (а следовательно, в единственной холловой подгруппе S_1^h для некоторого $h \in G$) в силу TI-условия. Так как число силовских 2-подгрупп группы H, равное $2^m + 1$, меньше $2^n + 1$,

то найдется силовская 2-подгруппа группы G, которая пересекается с H по единице. Приходим к противоречию с леммой 3.

2. Пусть $p = 3$. В этом случае $H \in \{PSL_2(3^m)\}$, где $m \geq 2$ и m делит n. Кроме того, подгруппа H может быть изоморфна A_5. Если $H \cong PSL_2(3^m)$, то, как и в п. 1, приходим к противоречию, полагая, что $3 \in \sigma_1$. Пусть $H \cong A_5$. Так как число силовских 3-подгрупп в группе G равно $3^n + 1$, а число силовских 3-подгрупп в A_5 равно 10, то $G \cong PSL_2(9)$. В этом случае $\sigma(G) = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ — минимальное разбиение, а потому подгруппа H σ-субнормальна в G ввиду основного результата работы [3]. Приходим к противоречию с условием теоремы.

3. Пусть $p = 5$. В этом случае $H \in PSL_2(5^m)$, где m делит n. Не нарушая общности рассуждений, можем полагать, что $5 \in \sigma_1$. Так как σ_1-холлова подгруппа S_1 группы G является 5-замкнутой, то по лемме 3 подгруппа H 5-субнормальна в G. Отсюда в силу леммы 2 справедливо равенство $H = G$, что невозможно.

4. Пусть $p \geq 7$. В этом случае $H \in \{PSL_2(p^m)\}$, где m делит n. Кроме того, подгруппа H может быть изоморфна A_5. Если $H \cong PSL_2(p^m)$, то, как и в п. 1, приходим к противоречию, полагая, что $p \in \sigma_1$.

Предположим, что $H \cong A_5$ и $p \in \sigma_1$. Тогда σ_1-холлова подгруппа S_1 группы G содержится в подгруппе Бореля $U : T$, где U — унипотентная группа, T — подгруппа Картана. Следовательно, $S_1 = U : T_1$, где $T_1 \subseteq T$. Предположим, что 15 делит $|T_1|$. Тогда S_1 имеет $\{3, 5\}$-холлову подгруппу, являющуюся циклической. Отсюда и из условия теоремы следует, что A_5 содержит $\{3, 5\}$-холлову подгруппу, что невозможно.

Пусть $(|T_1|, 3) = 1$ и $3 \in \sigma_2$. В этом случае для σ_2-холловой подгруппы S_2 группы G возможен один из следующих случаев: $S_2 \cong A_5$, S_2 является циклической группой, S_2 — диэдральная группа, $S_2 \cong A_4$, S_2 изоморфна симметрической группе S_4. Если $S_2 \cong A_5$, то ввиду условия теоремы $H \subseteq Core_G(S_2)$, что невозможно. Предположим, что S_2 — циклическая группа. Она, очевидно, является TI-подгруппой группы G и 3-замкнута. Число подгрупп, сопряженных с S_2 в группе G, равно $q(q-1)$, а число силовских 3-подгрупп в A_5 равно 10. Так как $q(q-1) > 10$, то отсюда имеем противоречие с леммой 3. Если S_2 является диэдральной группой, то $S_2 \cap H \cong 3 : 2$. Однако диэдр $3 : 2$ не является холловой подгруппой в H. Снова пришли к противоречию. Пусть теперь подгруппа S_2 изоморфна A_4. Отметим, что подгруппа H содержит в точности 5 подгрупп, изоморфных A_4, а в группе G их число для каждого класса сопряженности равно
$$\frac{q(q^2-1)}{2|A_4|} = \frac{q(q^2-1)}{24}.$$
Поскольку $p \geq 7$, то $q(q^2-1)/24 > 5$, и, следовательно, в G найдется подгруппа, изоморфная A_4, которая пересекается с H по единице. Последнее невозможно ввиду условия теоремы. Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа S_2 изоморфна симметрической группе S_4. В группе G число сопряженных с S_4 подгрупп равно $q(q^2-1)/48$ для каждого класса сопряженности. Поскольку $p \geq 7$, то $q(q^2-1)/48 > 5$, и, следовательно, в G найдется подгруппа, сопряженная с S_2, которая пересекается с H по единице.

Пусть $(|T_1|, 5) = 1$ и $5 \in \sigma_2$. В этом случае для σ_2-холловой подгруппы S_2 группы G возможен один из следующих случаев: $S_2 \cong A_5$, S_2 является циклической группой, S_2 — диэдральная группа. Если $S_2 \cong A_5$, то ввиду условия теоремы $H \subseteq Core_G(S_2)$, что невозможно. Если же S_2 — циклическая или диэдральная группа, то по лемме 3 $H \leq_5 G$. Последнее невозможно в силу леммы 2.

Рассмотрим далее группу $G \cong PSU_3(q)$, где $q = p^n$ для некоторого простого числа p. Будем опираться на информацию о строении максимальных подгрупп группы $SU_3(q)$, содержащуюся в табл. 8.5 и 8.6 работы [14].

Отметим, что
$$|G| = \frac{1}{(3, q+1)} q^3(q^2-1)(q^3+1) = \frac{1}{(3, q+1)} q^3(q+1)^2(q-1)(q^2-q+1).$$

Из данного представления порядка группы G, табл. 8.5 и 8.6 работы [14], а также из леммы 4 следует, что холловы подгруппы группы G могут содержаться в одной из следующих подгрупп: в подгруппе

$$U : T \cong q^3 : \frac{1}{(3, q+1)}(q-1),$$

являющейся подгруппой группы Бореля,
в подгруппе

$$\frac{1}{(3, q+1)}(q+1)^2 : S_3,$$

в подгруппе

$$\frac{1}{(3, q+1)}(q-1)$$

и в подгруппе

$$\frac{1}{(3, q+1)}(q^2-q+1) : 3.$$

Рассмотрим случаи $p = 2$, $p = 3$ и $p \geq 5$.

1. Пусть $p = 2$. Тогда согласно [14, табл. 8.5, 8.6] либо $H \in \{PSU_3(2^m)\}$, где $m > 1$ делит n, либо $H \in \{PSL_2(2^k)\}$ для некоторого $1 < k \leq n$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $2 \in \sigma_1$.

Пусть сначала $H \in \{PSU_3(2^m)\}$. Силовские 2-подгруппы группы G являются TI-подгруппами порядка 2^{3n}. σ_1-Холлова подгруппа S_1 содержится в подгруппе Бореля, являющейся 2-замкнутой группой. Число силовских 2-подгрупп группы G равно $2^{3n}+1$. Каждая силовская 2-подгруппа группы G содержится в точности в одной σ_1-холловой подгруппе. Каждая силовская 2-подгруппа из H в силу TI-условия содержится в единственной силовской 2-подгруппе группы G (а следовательно, в единственной холловой подгруппе S_1^g для некоторого $g \in G$). Так как число силовских 2-подгрупп группы H, равное $2^{3m}+1$, меньше $2^{3n}+1$, то найдется силовская 2-подгруппа группы G, а следовательно, и холлова подгруппа S_1^h для некоторого $h \in G$, которая пересекается с H по единице.

Рассмотрим случай $H \in \{PSL_2(2^k)\}$. Отметим, что число силовских 2-подгрупп группы H равно 2^k+1 и, очевидно, меньше $2^{3n}+1$. Далее, рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к противоречию.

2. Пусть $p = 3$. В силу [14, табл. 8.5, 8.6] либо $H \in \{PSU_3(3^m)\}$, где m делит n, либо $H \in \{PSL_2(3^k)\}$ для некоторого $1 < k \leq n$. Кроме того, подгруппа H может быть изоморфна A_5 или $PSL_2(7)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $3 \in \sigma_1$. В этом случае σ_1-холлова подгруппа S_1 содержится в подгруппе Бореля группы G. Так как подгруппа Картана группы G является циклической, то S_1 не содержит силовской 2-подгруппы группы G. Пусть $2 \in \sigma_2$.

Согласно [15, теорема 8.9] σ_2-холлова подгруппа S_2 группы G обладает нормальной холловой τ-подгруппой L, где $\tau = \sigma_2 \cap \pi(G) \setminus \{2\}$, $\tau \subseteq \pi(q-\epsilon)$ для $\epsilon = (-1)^{(q-1)/2}$, и $S_2 = L : P$, где $P \in Syl_2(G)$. Ясно, что если $r \in \tau$, то $r \geq 5$.

Из строения группы G [14, табл. 8.5, 8.6] и леммы 4 следует, что для всех остальных компонент σ_i $(i \geq 3)$ разбиения σ соответствующие σ_i-холловы подгруппы являются абелевыми. Отсюда ввиду леммы 3 для любого $r \in \sigma_i \cap \pi(G) \setminus \{2\}$ имеем $H_r \leq G$. Так как $r \geq 5$, то это невозможно в силу леммы 2. Следовательно, $\pi(S_2 \cap H) = \{2\}$ и $\pi(S_i \cap H) = \varnothing$ для $i \geq 3$. Отсюда вытекает, что подгруппа H имеет холлову факторизацию $H = (S_1 \cap H)(S_2 \cap H) = H_1H_2$, где $H_1 = R : S$, $R \in Syl_3(H)$, S — циклическая группа и $\pi(S) \subseteq \pi(q-1) \setminus \{2, 3\}$, $H_2 \in Syl_2(H)$. Из [16, теорема 7] следует, что $H \cong PSL_2(p)$, где p — простое число Мерсенна. Из строения H имеем, что $H \cong PSL_2(3)$. Однако группа $PSL_2(3)$ является разрешимой, что невозможно ввиду леммы 1.

3. Пусть $p \geq 5$. По [14, табл. 8.5, 8.6] $H \in \{PSU_3(p^m)\}$, где m делит n и $H \in \{PSL_2(p^k)\}$ для некоторого $k \leq n$. Кроме того, подгруппа H [14, табл. 8.6] может быть изоморфна одной из

следующих групп: $PSL_2(7)$, где $p \equiv 3,5,6 \pmod 7$ или $p=5$; A_6, где $p \equiv 11,14 \pmod{15}$ или $p=5$; A_5, где $p \equiv 11,14 \pmod{15}$ или $p=5$; A_7, где $p=5$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $p \in \sigma_1$. В этом случае σ_1-холлова подгруппа S_1 группы G содержится в подгруппе Бореля, являющейся p-замкнутой группой.

Если p делит порядок подгруппы H, то из леммы 3 следует, что $H \leq_p G$. Тогда ввиду леммы 2 имеем, что $G \cong PSU_3(5)$, $H \cong A_7$ и $p=5$. В этом случае $|G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ и $\sigma(G) = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \{7\}$ [17, с. 34]. Кроме того, из работы [17, с. 34] следует, что для группы G подгруппа H принадлежит списку $\{A_7, A_6, A_5\}$. В первом случае имеем $H \leq_7 G$, что невозможно в силу леммы 2. В двух оставшихся случаях имеем $H \leq_5 G$, что также невозможно ввиду леммы 2.

Таким образом, $H \in \{PSL_2(7), A_6, A_5, A_7\}$ и $(p, |H|) = 1$.

(a) $H \cong PSL_2(7)$. Если $7 \notin \sigma_1$, то $7 \in \sigma_i$ для некоторого $i \geq 2$, и σ_i-холлова подгруппа группы G является 7-замкнутой. По лемме 3 тогда $H \leq_7 G$. Последнее невозможно в силу леммы 2. Таким образом, $7 \in \sigma_1$. В этом случае

$$S_1 \subseteq U : F \cong q^3 : \frac{q-1}{(3, q+1)},$$

где $U : F$ содержится в подгруппе Бореля группы G.

Пусть $R \in Syl_7(S_1)$ и $\Omega = \{R^{u_1=1}, R^{u_2}, \cdots, R^{u_t}\}$ — множество сопряженных с R подгрупп в S_1, где $u_i \in S_1$, $t \leq q^3$. Предположим, что $R \subset S_1^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $\Omega^g = \{R^{u_1 g}, R^{u_2 g}, \cdots, R^{u_t g}\}$, и для некоторого u_i имеет место равенство $R^{u_i g} = R$. Отсюда $g \in u_i^{-1} N_G(R)$. Отметим, что

$$N_G(R) = C : \langle \tau \rangle \cong \frac{q^2-1}{(3, q+1)} : 2;$$

здесь $C = C_G(R)$, $\tau \in I(G)$. Кроме того, C содержится в подгруппе Бореля, которая содержит S_1, и, следовательно, C нормализует S_1. Поэтому $S_1^g = S_1^{u_i^{-1} n} = S_1^n$ для $n \in N_G(R)$. Отсюда следует, что $S_1^g = S_1$ или $S_1^g = S_1^\tau$. Таким образом, R содержится в двух σ_1-холловых подгруппах S_1 и S_1^τ.

Пусть $R_1 \in Syl_7(H)$. Тогда группе R_1 соответствуют в точности две σ_1-холловы подгруппы S_1 и S_1^τ такие, что $H \cap S_1 = H \cap S_1^\tau = R_1$. Число силовских 7-подгрупп в группе H равно 8. Значит, H пересекается не более чем с 16 подгруппами, сопряженными с S_1. Число подгрупп, сопряженных с S_1 в группе G, равно q^3+1. Поэтому найдется элемент $g_0 \in G$ такой, что $S_1^{g_0} \cap H = 1$.

(b) $H \in \{A_6, A_5\}$. Данный случай рассматривается точно так же, как и случай (a). Достаточно только заметить, что число силовских 5-подгруппп в A_6 равно 36, число силовских 5-подгрупп в A_5 равно 6 и $p \geq 7$.

(c) $H \cong A_7$. Ясно, что $5, 7 \in \sigma_1$ и S_1 содержит $\{5,7\}$-холлову подгруппу, которая является циклической. Следовательно, $S_1 \cap H$ содержит $\{5,7\}$-холлову подгруппу в A_7. Однако группа A_7 не имеет таких холловых подгрупп. Пришли к противоречию, которое завершает доказательство теоремы 1. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kegel O.H.** Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78. P. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169
2. **Wielandt H.** Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups (Santa Cruz, 1979). Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Ser. Proc. Sympos. Pure Math.; vol. 37). doi: 10.1090/pspum/037
3. **Kleidman P.B.** A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. (2). 1991. Vol. 133, no. 2. P. 369–428. doi: 10.2307/294

4. **Guralnick R., Kleidman P.B., Lyons R.** Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1993. Vol. 66, no. 1. P. 129–151. https://doi.org/10.1112/plms/s3-66.1.129
5. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022. 269 p. URL: https://kourovka-notebook.org/ .
6. **Skiba A.N.** On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010
7. **Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** О σ-субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 9. С. 337–343. doi: 10.33048/smzh.2020.61.209
8. **Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N.** On the Kegel-Wielandt σ-problem for binary partitions // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2022. Vol. 201, no. 1. P. 443–451. doi: 10.1007/s10231-021-01123-4
9. **Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** О некоторых аспектах σ-проблемы Кегеля — Виландта // Изв. вузов. Математика. 2022. № 2. С. 18–28. doi: 10.26907/0021-3446-2022-2-18-28
10. **Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** О σ-субнормальных подгруппах конечных $3'$-групп // Укр. мат. журн. 2020. Т. 72, № 6. С. 806–811.
11. **Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** К σ-проблеме Кегеля — Виландта // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 4. С. 564–570. doi: 10.4213/mzm12887
12. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
13. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407). doi: 10.1017/CBO9781139192576
15. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Vol. 66, № 5. P. 3–46. doi: 10.4213/rm9440
16. **Казарин Л.С.** О произведении конечных групп // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, no. 3. С. 528–531.
17. **Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985. 252 p. ISBN: 0-19-853199-0 .

Поступила 20.07.2023
После доработки 25.08.2023
Принята к публикации 4.09.2023

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”, Гомель, Беларусь
e-mail: vtutanov@gmail.com

REFERENCES

1. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1962, vol. 78, pp. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169
2. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute. In: *The Santa Cruz conf. on finite groups (Santa Cruz, 1979)*, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980, Ser. Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, pp. 161–173. doi: 10.1090/pspum/037
3. Kleidman P.B. A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups. *Ann. Math. (2)*, 1991, vol. 133, no. 2, pp. 369–428. doi: 10.2307/294
4. Guralnick R., Kleidman P.B., Lyons R. Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1993, vol. 66, no. 1, pp. 129–151. doi: 10.1112/plms/s3-66.1.129
5. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. Available at: https://kourovka-notebook.org/ .

6. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010
7. Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. On σ-subnormal subgroups of finite groups. *Siberian Math. J.*, 2020, vol. 61, no. 2, pp. 266–270. doi: 10.1134/S0037446620020093
8. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. On the Kegel-Wielandt σ-problem for binary partitions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2022, vol. 201, no. 1, pp. 443–451. doi: 10.1007/s10231-021-01123-4
9. Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. On some aspects of the Kegel-Wielandt σ-problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 2, pp. 15–23. doi: 10.3103/S1066369X22020050
10. Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. On σ-subnormal subgroups of finite $3'$-groups. *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 6, pp. 935–941. doi: 10.1007/s11253-020-01833-7
11. Kamornikov S.F., Tyutyanov V.N. On the Kegel–Wielandt σ-problem. *Math. Notes*, 2021, vol. 109, no. 4, pp. 580–584. doi: 10.1134/S0001434621030263
12. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
13. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin: Springer-Verlag, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
14. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576
15. Vdovin E.P., Revin D.O. Theorems of Sylow type. *Russian Math. Surveys*, 2011, vol. 66, no. 5, pp. 829–870. doi: 10.1070/RM2011v066n05ABEH004762
16. Kazarin L.S. On the product of finite groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 269, no. 3, pp. 528–531.
17. Conway J.N., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Oxford Univ. Press, 1985, 252 p. ISBN: 0-19-853199-0 .

Received July 20, 2023
Revised August 25, 2023
Accepted September 4, 2023

Funding Agency: The work was supported by Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research and the Russian Science Foundation (project F23RNF-237).

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., F. Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru .

Valentin Nikolayevich Tyutyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gomel Branch of International University “MITSO”, Gomel, 246029 Republic of Belarus, e-mail: vtutanov@gmail.com .

Cite this article as: S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov. On the Kegel–Wielandt σ-problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 121–129 .