С. Йи, М. Ли, С. Ф. Каморников, Конечные группы с системой обобщенно субнормальных подгрупп Шмидта, *Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 1, 89–97

DOI: 10.33048/smzh.2023.64.109

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2023. Том 64, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМОЙ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ШМИДТА

С. Йи, М. Ли, С. Ф. Каморников

Аннотация. Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел изучается строение конечной группы с заданной системой σ-субнормальных подгрупп Шмидта.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.109

Ключевые слова: конечная группа, σ-субнормальная подгруппа, группа Шмидта, σ-нильпотентная группа, σ-гиперцентр.

Светлой памяти
Виктора Александровича Ведерникова

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Простая проверка показывает, что любая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну *подгруппу Шмидта* (т. е. подгруппу, являющуюся группой Шмидта). В связи с этим естественна задача исследования строения групп, обладающих системой подгрупп Шмидта с заданными свойствами.

В данной работе изучается строение конечной группы с системой σ-субнормальных подгрупп Шмидта. Исследования инициированы следующими тремя проблемами.

Проблема 1 [1, проблема 19.85]. *Пусть каждая подгруппа Шмидта группы G σ-субнормальна. Верно ли, что существует такая нормальная σ-нильпотентная подгруппа N, что группа G/N циклическая?*

Проблема 2 [2, проблема 2.10]. *Описать конечные группы, в которых каждая подгруппа Шмидта σ-субнормальна.*

Проблема 3 [3, проблема 4.7]. *Описать конечные группы, в которых каждая $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа σ-субнормальна.*

Из [4, 5] следует, что для любого разбиения σ группа G является $\mathfrak{N}_\sigma$-критической тогда и только тогда, когда G — группа Шмидта и простые делители

The first author was supported by the Zhejiang Provintial Natural Science Foundation of China (Grant LY18A010028). Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211779 «Конвергенция–2025»).

ее порядка принадлежат различным компонентам разбиения σ. Поэтому проблема 3 является более общей (по сравнению с проблемой 2): в ней требование σ-субнормальности также налагается на подгруппы Шмидта, но не на все (как в проблеме 2), а лишь на те, простые делители порядка которых принадлежат различным компонентам разбиения σ.

Напомним, что концепция σ-субнормальной подгруппы базируется на следующих определениях. Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. При этом разбиение σ называется *бинарным*, если $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества π простых чисел.

Следуя [3], будем говорить, что группа G *σ-примарна*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Группа G называется *σ-нильпотентной*, если она является прямым произведением некоторых σ-примарных групп, т. е. G представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i-подгрупп для некоторых $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ σ-примарна.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Проблемы 1–3 активно исследовались для минимального разбиения σ. В частности, в [6] доказано, что коммутант группы G нильпотентен, если в ней все подгруппы Шмидта субнормальны. Полное описание групп с субнормальными подгруппами Шмидта предложено В. А. Ведерниковым в 2007 г. в [7].

Имеется также ряд публикаций, рассматривающих общий случай (см., например, [8–10]). Наилучший результат в этом направлении получен в [11], где для произвольного разбиения σ установлена цикличность фактор-группы $G/F_\sigma(G)$ и тем самым положительно решена проблема 1.

В данной работе предлагается полное решение проблемы 3.

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем. Первая из них дает решение проблемы 3 для бинарного разбиения. В теореме 2 общий случай редуцируется к бинарному.

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Пусть G — группа и $\overline{G} = G/Z$, где $Z = Z_\sigma(G)$. Тогда и только тогда все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы из G σ-субнормальны, когда выполняются следующие утверждения:*

1) *$\overline{G}$ имеет абелев цоколь и $\overline{G} = [\operatorname{Soc}(\overline{G})]\overline{H}$, где $\overline{H}$ — π-разложимая подгруппа из $\overline{G}$;*

2) *если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы $\overline{G}$, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, то $S = O^{\pi}(SO_{\pi}(\overline{G}))$;*

3) *если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы $\overline{G}$, где $p \in \pi'$ и $q \in \pi$, то $S = O^{\pi'}(SO_{\pi'}(\overline{G}))$.*

Далее для группы G и разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ полагаем

$$\sigma(G) = \{\sigma_i \cap \pi(G) \mid i \in I,\ \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}.$$

Следуя [7], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть *$S_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

На основании предложенного в [12] подхода доказывается следующий результат, решающий проблему 3 для произвольного разбиения σ.

Теорема 2. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$. Все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы группы G σ-субнормальны тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G такая, что $p \in \sigma_m$, $q \in \sigma_n$ для некоторых $m \neq n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то $S \subseteq O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$ и S $\{\sigma_m, \sigma'_m\}$-субнормальна в $O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$.*

Следствие. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$. Все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы группы G σ-субнормальны тогда и только тогда, когда для любой пары чисел $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические $(\sigma_i \cup \sigma_j)$-подгруппы группы G содержатся в $O_{\sigma_i \cup \sigma_j}(G)$ и для разбиения $\{\sigma_i, \sigma'_i\}$ подгруппа $O_{\sigma_i \cup \sigma_j}(G)$ имеет строение, описанное в теореме* 1.

2. Определения и предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в [13]. Зафиксируем некоторые из них:

— если π — некоторое множество простых чисел, то G_π — холлова π-подгруппа группы G;

— $[A]B$ — полупрямое произведение подгрупп A и B (с нормальной подгруппой A);

— $\mathrm{Soc}_\pi(G)$ — π-*цоколь* группы G, т. е. подгруппа из G, порожденная всеми ее минимальными нормальными π-подгруппами;

— $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех σ-нильпотентных групп (в случае $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ класс $\mathfrak{N}_\sigma$ совпадает с классом всех π-разложимых групп; группа G называется π-*разложимой*, если $G = G_\pi \times G_{\pi'}$);

— $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — σ-*нильпотентный корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой σ-нильпотентна;

— $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G;

— $O^\pi(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой является π-группой;

— $F_\sigma(G)$ — σ-*подгруппа Фиттинга* группы G (наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа группы G; если $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, то $F_\sigma(G) = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$).

Основное строение групп Шмидта установлено в [14, 15].

Лемма 1. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\pi(S) = \{p, q\}$;*

(2) *$S = [P]\langle a\rangle$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы S, $\langle a\rangle$ — ее силовская q-подгруппа, $\langle a^q\rangle \subseteq Z(S)$;*

(3) *P — $\mathfrak{N}$-корадикал группы S ($\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп);*

(4) *$P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $S/\Phi(P)$, $\Phi(P) = P' \subseteq Z(S)$;*

(5) *$\Phi(S) = Z(S) = P' \times \langle a^q\rangle$;*

(6) *$C_P(a) = \Phi(P)$;*

(7) *если* $Z(S) = 1$, *то* $|S| = p^m q$, *где* m — *показатель* p *по модулю* q.

Доказательство следующей леммы вытекает из основного результата в [4], опирающегося на классификацию конечных простых групп, и теоремы 3 из [5].

Лемма 2. *Пусть* σ — *некоторое разбиение множества всех простых чисел. Тогда и только тогда группа* G $\mathfrak{N}_\sigma$*-критическая, когда* G — *группа Шмидта и простые делители ее порядка принадлежат различным компонентам разбиения* σ.

Главный фактор H/K группы G называется *σ-центральным*, если полупрямое произведение $[H/K](G/C_G(H/K))$ является σ-примарной группой, в противном случае он называется *σ-эксцентральным*.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 3. *Пусть* π — *некоторое множество простых чисел и* $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. *Главный фактор* H/K *группы* G *является* σ*-центральным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *группы* H/K *и* $G/C_G(H/K)$ *являются* π*-группами;*
2) *группы* H/K *и* $G/C_G(H/K)$ *являются* π'*-группами.*

Нормальная подгруппа E группы G называется *σ-гиперцентральной*, если либо $E = 1$, либо каждый главный фактор группы G, расположенный ниже E, σ-централен. Через $Z_\sigma(G)$ обозначается произведение всех нормальных σ-гиперцентральных подгрупп группы G. Простая проверка показывает, что подгруппа $Z_\sigma(G)$ также σ-гиперцентральна в G. Подгруппа $Z_\sigma(G)$ называется *σ-гиперцентром* группы G. Если σ — минимальное разбиение множества всех простых чисел, то σ-гиперцентр группы G обозначается через $Z_\infty(G)$ и называется *гиперцентром* группы G. В этом случае, очевидно, $Z_\infty(G)$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, все G-главные факторы которой центральны.

Необходимые нам ключевые свойства σ-гиперцентра группы G, описанные в предложении 2.5 из [16], содержатся в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть* G — *группа,* σ — *разбиение множества всех простых чисел и* $Z = Z_\sigma(G)$. *Пусть* A *и* N — *подгруппы группы* G, *причем* $N \trianglelefteq G$. *Тогда выполняются следующие условия:*

1) $A \cap Z \subseteq Z_\sigma(A)$;
2) $ZN/N \subseteq Z_\sigma(G/N)$;
3) *если* $N \subseteq Z$, *то* $Z/N = Z_\sigma(G/N)$;
4) *группы* $G/C_G(Z)$ *и* Z σ*-нильпотентны;*
5) *если группа* G/Z σ*-нильпотентна, то* G *также* σ*-нильпотентна;*
6) *если* A σ*-нильпотентна, то* AZ *также* σ*-нильпотентна;*
7) *если* $N \subseteq Z$, *то* A σ*-субнормальна в* G *тогда и только тогда, когда* AN/N σ*-субнормальна в* G/N.

Лемма 5. *Пусть* π — *некоторое множество простых чисел и* $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. *Если* N — *нормальная подгруппа группы* G *и* $N \subseteq Z_\sigma(G)$, *то*

1) *если* S *является* σ*-субнормальной* $S_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппой группы* G, *где* $p \in \pi$ *и* $q \in \pi'$, *то* SN/N *является* σ*-субнормальной* $S_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппой группы* G/N;

2) *если* K/N — σ*-субнормальная* $S_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппа группы* G/N, *где* $p \in \pi$ *и* $q \in \pi'$, *и* T — $S_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппа группы* K, *то* T *является* σ*-субнормальной* $S_{\langle p,q\rangle}$*-подгруппой группы* G *и* $K = TN$.

Доказательство. 1. Пусть S — σ-субнормальная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$. Тогда ввиду леммы 2.6 из [3] SN/N является σ-

субнормальной подгруппой группы G/N. Кроме того, ввиду утверждения 1 леммы 4 из

$$SN/N \simeq S/S \cap N, S \cap N \subseteq Z_\sigma(S) = Z_\infty(S)$$

и строения группы Шмидта следует, что $S/S \cap N$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой, а значит, SN/N будет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой группы G/N.

2. По утверждению 1 подгруппа TN/N является $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой группы K/N, значит, $K = TN$. Поскольку K/N — σ-субнормальная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/N, ввиду утверждения 7 леммы 4 подгруппа T σ-субнормальна в G.

Лемма доказана.

Группа G называется π-*замкнутой*, если она обладает нормальной холловой π-подгруппой.

Лемма 6. *Пусть $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, где π — некоторое множество простых чисел. Если G — π-замкнутая группа и S — ее σ-субнормальная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа такая, что $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, то $S = O^\pi(SO_\pi(G))$. В частности, $S \trianglelefteq SO_\pi(G)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.6 из [3] подгруппа S σ-субнормальна в $SO_\pi(G)$. Поэтому по определению существует такая цепь подгрупп

$$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n = SO_\pi(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа S_{i-1} нормальна в S_i, либо $S_i / \operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ является π-группой, либо $S_i / \operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ — π'-группа.

Отметим, что $S_i / \operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ не может быть π'-группой, так как индекс $|S_i : S_{i-1}|$ является π-числом. Таким образом, для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа S_{i-1} нормальна в S_i, либо $S_i / \operatorname{Core}_{S_i}(S_{i-1})$ — π-группа. Кроме того, если подгруппа S_{i-1} нормальна в S_i, то S_i/S_{i-1} — π-группа, так как индекс $|S_i : S_{i-1}|$ является π-числом. Следовательно, $O^\pi(S_i) \subseteq S_{i-1}$.

Итак, имеем субнормальную цепь

$$O^\pi(S_0) \subseteq O^\pi(S_1) \subseteq \cdots \subseteq O^\pi(S_{n-1}) \subseteq O^\pi(S_n) = O^\pi(SO_\pi(G))$$

такую, что $O^\pi(S_i)/O^\pi(S_{i-1})$ — π-группа для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда по лемме 3.1.7 из [17]

$$O^\pi(S) = O^\pi(SO_\pi(G)).$$

Если $O^\pi(S)$ — собственная подгруппа в S, то подгруппа $O^\pi(S)$ нильпотентна, а потому силовская q-подгруппа из S нормальна в S, что противоречит лемме 2. Таким образом, $S = O^\pi(SO_\pi(G))$ и подгруппа S нормальна в $SO_\pi(G)$.

Лемма доказана.

Следуя [18], через $A_p(G)$ будем обозначать группу $N_G(G_p)/G_pC_G(G_p)$. *Силовским графом* группы G называется граф $\Gamma_A(G)$, у которого множество вершин совпадает с множеством $\pi(G)$ и пара (p, q) чисел $p, q \in \pi(G)$ образует ребро графа $\Gamma_A(G)$ тогда и только тогда, когда либо $p \in \pi(A_q(G))$, либо $q \in \pi(A_p(G))$. Группа называется *почти простой*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, которая является простой неабелевой группой.

Лемма 7 [18, главная теорема]. *Если G — почти простая группа, то $\Gamma_A(G)$ — связный граф.*

Из леммы 7, в частности, следует, что для разбиения $\sigma = \{\pi, \pi'\}$, где π — некоторое множество простых чисел, в каждой простой неабелевой πd-группе существует подгруппа Шмидта, которая является либо $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, либо $S_{\langle q,p\rangle}$-группой, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$.

3. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Ввиду леммы 5, не нарушая общности рассуждений, можно полагать, что $Z_\sigma(G) = 1$ и все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы группы G σ-субнормальны. Покажем, что тогда группа G имеет абелев цоколь и $G = [\mathrm{Soc}(G)]H$, где H — π-разложимая подгруппа из G. При этом если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, то $S = O^{\pi}(SO_{\pi}(G))$, а если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi'$ и $q \in \pi$, то $S = O^{\pi'}(SO_{\pi'}(G))$.

Из $Z_\sigma(G) = 1$ следует, что $G \neq 1$ и в G имеется по крайней мере одна $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа. Кроме того, G является πd-группой, т. е. $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$ и $\pi(G) \cap \pi' \neq \varnothing$.

Далее проведем доказательство в несколько шагов.

Шаг 1. $\Phi(G) = 1$.

Предположим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в Φ. Тогда L — элементарная абелева r-группа для некоторого простого числа r. Предположим, что $r \in \pi$. Так как $Z_\sigma(G) = 1$, ввиду леммы 3 для некоторого $p \in \pi'$ найдется p-элемент $x \in G$, который не централизует L. Тогда $L\langle x\rangle$ — ненильпотентная $\{r,p\}$-группа. Пусть V — подгруппа Шмидта, содержащаяся в $L\langle x\rangle$. Тогда V — $S_{\langle r,p\rangle}$-группа и $V_r \subseteq L$. Более того, по лемме 2 V — $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа группы G. Ввиду леммы 2.6 из [3] подгруппа VL/L σ-субнормальна в G/L. Так как VL/L — p-подгруппа, по лемме 2.6 из [3]

$$VL/L \subseteq F_\sigma(G/L) = O_\pi(G/L) \times O_{\pi'}(G/L).$$

Следовательно, $VL/L \subseteq O_{\pi'}(G/L)$. Но тогда по лемме 4.4 из [19] подгруппа V нильпотентна; противоречие.

Случай $r \in \pi'$ аналогично приводит к противоречию.

Шаг 2. $\mathrm{Soc}(G)$ *— абелева группа.*

Предположим, что группа G содержит неабелеву минимальную нормальную подгруппу L. Тогда L представима в виде $L = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_t$, где L_1, $L_2, \ldots, L_t$ — изоморфные простые группы. Предположим, что L_1 — πd-группа. Тогда по лемме 7 в L_1 найдется подгруппа Шмидта S, которая является либо $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, либо $S_{\langle q,p\rangle}$-группой, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что S — $S_{\langle p,q\rangle}$-группа. Ввиду леммы 2 S — $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа. Поэтому по условию S σ-субнормальна в G. По лемме 3.1.5 из [17] подгруппа $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в L_1. Пришли к противоречию с простотой группы L_1.

Значит, L является либо π-подгруппой, либо π'-подгруппой. Пусть для определенности L является π-подгруппой. Так как $Z_\sigma(G) = 1$, ввиду леммы 3 подгруппа $C_G(L)$ не содержит некоторую силовскую q-подгруппу группы G, где $q \in \pi'$. Следовательно, найдется q-элемент $z \in G$, который не централизует L. Тогда $L\langle z\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть S — подгруппа Шмидта, содержащаяся в $L\langle z\rangle$. Тогда S — $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа, которая по условию σ-субнормальна в G. Ввиду леммы 2.6 из [3] подгруппа S σ-субнормальна в LS, а значит, по лемме 3.1.5 из [17] подгруппа $S^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в LS. Так как $S^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq L$, то $O_p(L) \neq 1$, что невозможно ввиду строения подгруппы L.

Случай $\pi(L) \subseteq \pi'$ аналогично приводит к противоречию. Следовательно, все минимальные нормальные подгруппы группы G абелевы.

Шаг 3. *В группе G существует самонормализуемая подгруппа H такая, что $G = [F(G)]H$. При этом $F(G) = \mathrm{Soc}(G)$.*

Пусть $F = F(G)$. Поскольку ввиду утверждения шага 1 $\Phi(G) = 1$, то по лемме 7.9 из [19] подгруппа F является прямым произведением абелевых минимальных нормальных подгрупп группы G, т. е. $F(G) = \mathrm{Soc}(G)$. Кроме того, в G найдется подгруппа H такая, что $G = [F]H$ и $F \cap H = 1$. Пусть $K = N_G(H)$. Допустим, что $K \neq H$. Тогда

$$K = H(F \cap K) = H \times (F \cap K)$$

и $(F \cap K) \neq 1$. Отсюда и из абелевости F в силу $G = \langle F, H\rangle \subseteq C_G(F \cap K)$ имеем $Z(G) \neq 1$, откуда следует $Z_\sigma(G) \neq 1$; противоречие с условием теоремы. Следовательно, $H = N_G(H)$.

Шаг 4. *Дополнение H к подгруппе $F(G)$ в группе G является π-разложимой подгруппой.*

Предположим, что подгруппа H не является π-разложимой группой. Тогда H обладает такой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой S, что либо $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, либо $p \in \pi'$ и $q \in \pi$. Пусть для определенности $p \in \pi$ и $q \in \pi'$. Ввиду условия теоремы подгруппа S σ-субнормальна в G, а значит, по лемме 3.1.5 из [17] подгруппа $S^{\mathfrak{N}_\sigma} = S_p$ субнормальна в G. Отсюда ввиду следствия A.14.11 из [13] имеем $S_p \subseteq O_p(G)$. Последнее невозможно, так как ввиду утверждения шага 3 справедливо равенство $S \cap F(G) = 1$.

Шаг 5. *Если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi$ и $q \in \pi'$, то $S = O^\pi(SO_\pi(G))$.*

Ввиду леммы 2.6 из [3] подгруппа S σ-субнормальна в $SO_\pi(G)$. Кроме того, подгруппа $SO_\pi(G)$ π-замкнута. Поэтому по лемме 6 справедливо равенство $S = O^\pi(SO_\pi(G))$.

Аналогично показывается, что если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, где $p \in \pi'$ и $q \in \pi$, то $S = O^{\pi'}(SO_{\pi'}(G))$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Ввиду леммы 5, не нарушая общности рассуждений, можно полагать, что $Z_\sigma(G) = 1$.

Пусть S — произвольная $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа группы G. Тогда ввиду леммы 2 S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G и простые числа p и q принадлежат различным компонентам разбиения σ. Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что $p \in \pi$ и $q \in \pi'$. Тогда по условию $S = O^\pi(SO_\pi(G))$. Отсюда, в частности, следует, что подгруппа S нормальна в $SO_\pi(G)$. Так как подгруппа $SO_\pi(G)/O_\pi(G)$ является q-группой для $q \in \pi'$, ввиду утверждений шагов 1 и 4 по теореме Холла имеем

$$SO_\pi(G)/O_\pi(G) \subseteq H_{\pi'}O_{\pi'}(G)O_\pi(G)/O_\pi(G) = O_{\pi'}(G/O_\pi(G)).$$

Отсюда по лемме 2.6 из [3] получаем, что подгруппа $SO_\pi(G)$ σ-субнормальна в подгруппе $H_{\pi'}O_{\pi'}(G)O_\pi(G)$, которая нормальна в G. Следовательно, подгруппа S σ-субнормальна в G.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Необходимость. Пусть все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы группы G σ-субнормальны в G. Покажем, что если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G такая, что $p \in \sigma_m$, $q \in \sigma_n$ для некоторых $m \neq n \in \{1, 2, \dots, k\}$, то $S \subseteq O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$ и S $\{\sigma_m, \sigma'_m\}$-субнормальна в $O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$.

Отметим, что так как по лемме 1 подгруппа S бипримарна, то из $m \neq n$ по лемме 2 следует, что она $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая, а потому по условию S σ-субнормальна в G. Ввиду теоремы А из [12] подгруппа S $\{\sigma_i, \sigma_i'\}$-субнормальна в G для любых i из $\{1, 2, \ldots, k\}$ (в частности, подгруппа S $\{\sigma_m, \sigma_m'\}$-субнормальна в G). Отсюда следует, что S $\{\sigma_i, \sigma_i'\}$-субнормальна в G для любых i, отличных от m и n. Тогда по лемме 2.6 из [3] $S \subseteq O_{\sigma_i'}(G)$ для всех $i \neq m$ и $i \neq n$. Следовательно, $S \subseteq O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$.

Достаточность. Пусть выполняется следующее условие: если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G такая, что $p \in \sigma_m$, $q \in \sigma_n$ для некоторых $m \neq n \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то $S \subseteq O_{\sigma_m \cup \sigma_n}(G)$ и S $\{\sigma_m, \sigma_m'\}$-субнормальна в G. Покажем, что все $\mathfrak{N}_\sigma$-критические подгруппы группы G σ-субнормальны в G.

Пусть D — произвольная $\mathfrak{N}_\sigma$-критическая подгруппа группы G. Ввиду леммы 2 D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G и простые числа p и q принадлежат различным компонентам разбиения σ. Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что $p \in \sigma_1$ и $q \in \sigma_2$. Тогда из условия теоремы следует, в частности, что $D \subseteq O_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(G)$. Кроме того, подгруппа D $\{\sigma_m, \sigma_m'\}$-субнормальна (а значит, и σ-субнормальна) в $O_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(G)$. Из $O_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(G) \trianglelefteq G$ следует, что D будет σ-субнормальной в G.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.

2. *Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N.* On σ-subnormal subgroups of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2021. V. 45. P. 813–824.

3. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.

4. *Arad Z., Chillag D.* A criterion for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. V. 87. P. 472–482.

5. *Ведерников В. А.* О π-свойствах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1986. С. 13–19.

6. *Монахов В. С., Княгина И. Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

7. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

8. *Al-Sharo K. A., Skiba A. N.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2017. V. 45. P. 3117–3134.

9. *Hu B., Huang J.* On finite groups with generalized σ-subnormal Schmidt subgroups // Commun. Algebra. 2018. V. 46, N 7. P. 3127–3134.

10. *Сунь Ф., Йи С., Каморников С. Ф.* Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 450–456.

11. *Yi X., Kamornikov S. F.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. V. 560. P. 181–191.

12. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Yi X.* On σ-subnormality criteria in finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2022. V. 226, N 2. Article 106822. 5 p.

13. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

14. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.

15. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

16. *Hu B., Huang J., Skiba A. N.* Characterizations of finite σ-nilpotent and σ-quasinilpotent groups // Bull. Malays. Math. Soc. 2019. V. 42, N 5. P. 2091–2104.

17. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Мн.: Белорусская наука, 2003.

18. *Kazarin L. S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M. D.* On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers // Isr. J. Math. 2011. V. 186. P. 251–271.

19. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 2 апреля 2022 г.
После доработки 9 июня 2022 г.
Принята к публикации 15 июня 2022 г.

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
(Чжэцзянский политехнический университет, г. Ханчжоу)
yixiaolan2005@126.com

Li Min (Ли Мин)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
(Чжэцзянский политехнический университет, г. Ханчжоу)
limin9790@163.com

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1404-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru