С. Йи, С. Ван, С. Ф. Каморников, О наследственных сверхрадикальных формациях полной характеристики, *Матем. заметки*, 2022, том 112, выпуск 1, 76–82

DOI: 10.4213/mzm13607

Математические заметки

Том 112 выпуск 1 июль 2022

УДК 512.542

О наследственных сверхрадикальных формациях полной характеристики

С. Йи, С. Ван, С. Ф. Каморников

Формация $\mathfrak{F}$ конечных групп называется сверхрадикальной, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;
- любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе приводится бесконечная серия наследственных сверхрадикальных формаций полной характеристики, которые не являются разрешимо насыщенными. Тем самым дополняется отрицательный ответ на вопрос 14.99 (b) из “Коуровской тетради”.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: конечная группа, обобщенно субнормальная подгруппа, формация, сверхрадикальная формация, разрешимо насыщенная формация.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13607

1. Введение и постановка задачи. В работе рассматриваются только конечные группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, т.е. класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

такая, что $H_i / \operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Понятие $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, введенное в классе конечных разрешимых групп Картером и Хоуксом [1], а в произвольном случае – Шеметковым [2], сформировало в теории конечных групп содержательное направление, связанное с изучением сверхрадикальных формаций (см., например, обзор [3]).

Формация $\mathfrak{F}$ называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная формация;

Первый автор были поддержан Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (грант LY18A010028). Исследования третьего автора выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211779).

2) любая группа $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Интерес к сверхрадикальным формациям, обусловленный их замечательными приложениями в рамках исследования решеточных и факторизационных свойств групп, определил целый ряд проблем и открытых вопросов. Центральное место среди них занимают следующие две задачи, сформулированные в 1999 году Шеметковым в "Коуровской тетради" [4] под номером 14.99:

(a) *найти все сверхрадикальные локальные формации*;

(b) *доказать, что всякая наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной*.

Задача 14.99 (a) сегодня достаточно далека от своего полного решения. Отметим только, что значительный прогресс по ней достигнут в работах [5], [6], где проблема описания наследственных сверхрадикальных формаций $\mathfrak{F}$ связывается с вопросом характеризации ее $\mathfrak{F}$-критических групп.

Что касается задачи 14.99 (b), то в [7] показано, что в общем случае она имеет отрицательное решение, т.е. существуют наследственные сверхрадикальные формации, которые не являются разрешимо насыщенными. В частности, к таковым относится формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{H} = \operatorname{form} G$, G – группа, изоморфная группе Судзуки $\mathrm{Sz}(2^3)$ и $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$ (группа H принадлежит формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $H/\operatorname{Soc}(H)$ – разрешимая π-группа, а $\operatorname{Soc}(H)$ – конечное прямое произведение групп, изоморфных $\mathrm{Sz}(2^3)$).

В связи с результатами работы [7] естественна постановка следующих двух вопросов, усиливающих задачу 14.99 (b):

(c) *существует ли наследственная сверхрадикальная формация полной характеристики, которая не является разрешимо насыщенной?*

(d) *будет ли бесконечным множество всех наследственных сверхрадикальных формаций, которые не являются разрешимо насыщенными?*

Полные ответы на эти вопросы предлагаются в данной работе. В частности, здесь доказывается, что

1) существуют наследственные сверхрадикальные формации полной характеристики, которые не являются разрешимо насыщенными;

2) множество всех наследственных сверхрадикальных формаций, которые не являются разрешимо насыщенными, бесконечно.

Отметим, что вопросы (c) и (d) попадают в орбиту целого круга задач, связанных с нахождением разрешимо насыщенных наследственных формаций (см., например, вопросы 12.7 и 15.38 из [4], проблему 23.17 из [8]). Ряд достаточных признаков разрешимой насыщенности формаций приведен в работе [9].

2. Определения и предварительные результаты. В данной работе используются определения и обозначения, принятые в [10], [11].

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G). Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*нормальной*, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. С учетом этого определения приведенное во введении определение $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы может быть сформулировано следующим эквивалентным образом. Подгруппа H группы G называется

$\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G$$

такая, что H_{i-1} – $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа группы H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нам понадобится следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G будем обозначать через $sn_{\mathfrak{F}}(G)$. Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* (S-*замкнутым* в терминологии книги [11]), если он замкнут относительно взятия подгрупп.

Доказательство следующих лемм можно найти в [10].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, H и N – подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*

1) *если $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$, то $HN/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$;*
2) *если $N \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$ тогда и только тогда, когда $H/N \in sn_{\mathfrak{F}}(G/N)$.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда*

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$;*
2) *если $H \in sn_{\mathfrak{F}}(G)$, то $H \cap K \in sn_{\mathfrak{F}}(K)$ для любой подгруппы K группы G.*

Характеристикой класса $\mathfrak{F}$ называется множество $\mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ всех тех простых чисел p, для которых группа порядка p принадлежит $\mathfrak{F}$. В частности, для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, приведенной в разделе 1, $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{2, 5, 7, 13\}$.

Говорят, что класс $\mathfrak{F}$ имеет *полную характеристику*, если $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенным*, если для любой разрешимой нормальной подгруппы N группы G из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Понятие разрешимо насыщенной формации предложено Бэром для характеризации введенных им и Шеметковым (параллельно и независимо) композиционных формаций. Вопрос о соотношении композиционных и разрешимо насыщенных формаций решен следующей теоремой Бэра (см. [11; теорема V.4.17]): *Формация является разрешимо насыщенной тогда и только тогда, когда она композиционная.*

Идея композиционной формации развивает принадлежащую Гащюцу концепцию локальной формации, имеющей в теории конечных групп целый ряд замечательных приложений (см., например, книгу [12]). Каждая локальная формация является композиционной (а значит, разрешимо насыщенной ввиду теоремы Бэра). Обратное неверно: существуют многочисленные примеры композиционных формаций, которые не являются локальными (одной из них, например, является формация $\mathrm{form}\, G$, где G – простая неабелева группа). В то же время в универсуме всех разрешимых групп понятия локальной и разрешимо насыщенной формации эквивалентны.

Зафиксируем следующие обозначения:

- $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;
- $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;
- если $\mathfrak{F}$ – непустой класс и π – множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ – класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем для класса $\mathfrak{F}$ через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок хотя бы одной группы из $\mathfrak{F}$. Очевидно, в общем случае $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \neq \pi(\mathfrak{F})$. В то же время для наследственного класса $\mathfrak{F}$ всегда выполняется равенство $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые непустые классы групп такие, что $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Обозначим $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{H})$. Мы будем использовать конструкцию $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}$, определяемую как множество всех групп G таких, что $G = O_{\pi_1}(G) \times O_{\pi_2}(G)$, где $O_{\pi_1}(G) \in \mathfrak{F}$ и $O_{\pi_2}(G) \in \mathfrak{H}$.

Эта конструкция может быть обобщена следующим образом. Пусть I – непустое множество. Для каждого $i \in I$ пусть $\mathfrak{F}_i$ – непустой класс групп. Пусть, кроме того, $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i, j \in I$, где $i \neq j$. Если $\pi_i = \pi(\mathfrak{F}_i)$, $i \in I$, то через $\bigtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ будем обозначать множество всех групп G таких, что

$$G = O_{\pi_{i_1}}(G) \times \cdots \times O_{\pi_{i_n}}(G),$$

где $O_{\pi_{i_j}}(G) \in \mathfrak{F}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$.

3. Основной результат. Главная цель работы – доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ – некоторое семейство формаций. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$ из I, то справедливы следующие утверждения*:

1) *если для любого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i$ является наследственной, то формация $\bigtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ также является наследственной*;
2) *если для любого $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i$ является наследственной и сверхрадикальной, то формация $\bigtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ также является наследственной и сверхрадикальной.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{F} = \bigtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Тот факт, что класс $\mathfrak{F}$ является формацией, следует из [13].

1) Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ не является наследственной. Тогда существует принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ группа, у которой имеется собственная подгруппа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Выберем среди таких групп группу R наименьшего порядка. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и в группе R имеется такая подгруппа U, что $U \notin \mathfrak{F}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что U – максимальная подгруппа группы R.

Если K – минимальная нормальная подгруппа группы R, то ввиду выбора группы R имеем, что $UK/K \simeq U/U \cap K \in \mathfrak{F}$. Если K_1 – минимальная нормальная подгруппа группы R, отличная от подгруппы K, то аналогично показывается, что $U/U \cap K_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$U \simeq U/(U \cap K) \cap (U \cap K_1) \in \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие с тем, что $U \notin \mathfrak{F}$. Значит, K – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R.

Так как $R \in \mathfrak{F}$, то из строения формации $\mathfrak{F}$ и единственности в R минимальной нормальной подгруппы K следует, что $R \in \mathfrak{F}_i$ для некоторого $i \in I$. Так как формация $\mathfrak{F}_i$ является наследственной, то подгруппа U группы R принадлежит $\mathfrak{F}_i$. Тогда из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $U \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является наследственной. Утверждение 1) теоремы доказано.

2) Ввиду утверждения 1) формация $\mathfrak{F}$ является наследственной. Предположим, что она не является сверхрадикальной. Тогда из определения сверхрадикальной формации следует, что существуют не принадлежащие формации $\mathfrak{F}$ группы, представимые в виде произведения двух $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Выберем среди них группу R наименьшего порядка. Тогда R обладает такими $\mathfrak{F}$-субнормальными $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B, что $R = AB$, но $R \notin \mathfrak{F}$.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что A и B – максимальные подгруппы группы R. Действительно, так как подгруппа A $\mathfrak{F}$-субнормальна в R, то существует максимальная цепь подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{k-1} \subset A_k = R$$

такая, что $(A_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq A_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Ввиду тождества Дедекинда имеем, что $A_{k-1} = A(A_{k-1} \cap B)$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $A_{k-1} \cap B \in \mathfrak{F}$. Кроме того, по лемме 2 подгруппы A и $A_{k-1} \cap B$ являются $\mathfrak{F}$-субнормальными в подгруппе A_{k-1}. Значит, ввиду выбора группы R подгруппа A_{k-1} принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Итак, будем считать далее, что A и B – $\mathfrak{F}$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы R. Тогда из определения $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппы следует, что $1 \neq R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы R. Ввиду выбора группы R, с учетом леммы 1, имеем, что $R/L \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $L = R^{\mathfrak{F}}$.

Отметим еще, что из конечности группы R следует существование лишь конечного числа индексов i из I, для которых $\pi(R) \cap \pi(\mathfrak{F}_i) \neq \varnothing$. Пусть для определенности это будут индексы $1, 2, \ldots, n$. Тогда $R = R_1 R_2 \cdots R_n$, где R_i – холлова π_i-подгруппа группы R для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, причем $R_i \neq 1$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной и $L = R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \in \mathfrak{F}$, то подгруппа L представима в виде $L = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$, где L_i – холлова π_i-подгруппа группы L для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Отсюда и из единственности минимальной нормальной подгруппы L следует, что $L_i \neq 1$ только для одного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $L_1 \neq 1$. Тогда $L = L_1$, а значит, L – π_1-подгруппа группы R. Так как подгруппа L нормальна в R, то по теореме Холла из [14] имеем, что $L \subseteq R_1$.

Предположим, что $L \subseteq \Phi(R)$. Тогда ввиду [12; лемма 4.4] из $R/L \in \mathfrak{F}$ следует, что $R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$. Так как $R_i \neq 1$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы L следует, что $R = R_1$ – π_1-группа. Значит, A и B – π_1-подгруппы группы R. Отсюда и из строения формации $\mathfrak{F}$ имеем, что A и B – $\mathfrak{F}_1$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}_1$-подгруппы группы R. Так как по условию теоремы формация $\mathfrak{F}_1$ является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию с тем, что $R \notin \mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь случай, когда L не содержится в подгруппе Фраттини группы R. Так как L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R, то в этом случае $C_R(L) \subseteq L$. Из $A \in \mathfrak{F}$ следует, что $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, где A_i – холлова π_i-подгруппа группы A для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, $L = R^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B \subseteq A$. Отсюда и из $C_R(L) \subseteq L$ следует, что $A_2 = \cdots = A_n = 1$ и $A = A_1$ – π_1-подгруппа группы R. Аналогично показывается, что B – π_1-подгруппа группы R. Из $R = AB$ следует, что и сама группа R является π_1-группой. Теперь из строения формации $\mathfrak{F}$ имеем, что A и B – $\mathfrak{F}_1$-нормальные максимальные $\mathfrak{F}_1$-подгруппы группы R. Так как по условию теоремы формация $\mathfrak{F}_1$ является сверхрадикальной, то $R \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию с тем, что $R \notin \mathfrak{F}$. Утверждение 2) теоремы доказано.

4. Следствия теоремы. Теорема позволяет построить целую серию наследственных сверхрадикальных формаций, которые не являются разрешимо насыщенными. При этом мы будем опираться на следующий основной результат работы [7], который приведем в виде леммы.

Лемма 3. *Пусть G – группа, изоморфная* $\mathrm{Sz}(2^3)$, $\pi = \pi(G) = \{2, 5, 7, 13\}$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, *где* $\mathfrak{H} = \operatorname{form} G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *формация $\mathfrak{F}$ является наследственной и сверхрадикальной*;

(2) *формация $\mathfrak{F}$ не является разрешимо насыщенной.*

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 4. *Для любого множества π простых чисел формация $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп является наследственной и сверхрадикальной.*

Следствие 1. *Пусть G – группа, изоморфная* $\mathrm{Sz}(2^3)$, $\pi = \{2, 5, 7, 13\}$ *и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\pi$, *где* $\mathfrak{H} = \operatorname{form} G$. *Тогда для любого подмножества ω множества* $\mathbb{P} \setminus \{2, 5, 7, 13\}$ *формация $\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_\omega$ является наследственной и сверхрадикальной, но не является разрешимо насыщенной.*

Если $\omega = \mathbb{P} \setminus \{2, 5, 7, 13\}$, то формация $\mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_\omega$ содержит все нильпотентные группы, а значит, имеет полную характеристику. Поэтому вопрос (c) из п. 1 имеет положительный ответ.

Следствие 2. *Существуют наследственные сверхрадикальные формации полной характеристики, которые не являются разрешимо насыщенными.*

Так как множество всех формаций вида $\mathfrak{S}_\omega$, где $\omega \subseteq \mathbb{P} \setminus \{2, 5, 7, 13\}$, бесконечно, то и вопрос (d) из п. 1 имеет положительный ответ.

Следствие 3. *Множество всех наследственных сверхрадикальных формаций, которые не являются разрешимо насыщенными, является бесконечным.*

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга – это формация, являющаяся классом Фиттинга.

В [4] под номером 12.7 Васильевым была выдвинута гипотеза о том, что каждая наследственная формация Фиттинга является разрешимо насыщенной. Простая проверка показывает, что формация $\mathfrak{F}$ из следствия 1 является наследственной формацией Фиттинга, но не является разрешимо насыщенным классом.

Следствие 4. *Существуют наследственные формации Фиттинга с полной характеристикой, которые не являются разрешимо насыщенными.*

Следствие 5. *Множество всех наследственных формаций Фиттинга, которые не являются разрешимо насыщенными, бесконечно.*

Другой пример наследственной формации Фиттинга, которая не является разрешимо насыщенной и имеет ограниченную характеристику, был построен в работе [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Carter, T. Hawkes, "The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group", *J. Algebra*, **5**:2 (1967), 175–202.
[2] Л. А. Шеметков, "Ступенчатые формации групп", *Матем. сб.*, **94 (136)**:4 (8) (1974), 628–648.
[3] С. Ф. Каморников, "Сверхрадикальные формации", *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **3 (84)** (2014), 62–70.
[4] *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*, 17-е изд., Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2010.
[5] С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, "Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций", *Сиб. матем. журн.*, **55**:1 (2014), 97–108.
[6] A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov, "On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups", *J. Algebra*, **403** (2014), 69–76.
[7] С. Йи, С. Ф. Каморников, "О наследственных сверхрадикальных формациях", *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 332–338.
[8] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Наука, М., 1989.
[9] A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, "A note on solubly saturated formations of finite groups", *J. Algebra Appl.*, **14**:4 (2015), 1550047.
[10] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Белорусская наука, Мн., 2003.
[11] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
[12] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
[13] С. Ф. Каморников, "Пронормальные проекторы конечных ω-разрешимых групп", *Вопросы алгебры*, **2** (1986), 80–86.
[14] P. Hall, "Theorems like Sylow's", *Proc. London Math. Soc.*, **6** (1956), 286–304.
[15] С. Ф. Каморников, "О двух задачах из "Коуровской тетради"", *Матем. заметки*, **55**:6 (1994), 59–63.

С. Йи
Zhejiang University of Technology, КНР
E-mail: yixiaolan2005@126.com

С. Ван
Zhejiang University of Technology, КНР
E-mail: xingchen13@live.com

С. Ф. Каморников
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило
19.09.2021
Принято к публикации
23.01.2022