Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.542.4

О РЕШЕТКЕ РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

С. Ф. Каморников

Аннотация. Изучается строение решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ всех регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов. Описываются все наследственные формации $\mathfrak{X}$, для которых ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна и не превосходит $|\pi(\mathfrak{X})|$, где $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{X}$.

Ключевые слова: конечная группа, примитивная группа, подгрупповой функтор, решетка регулярных транзитивных подгрупповых функторов.

1. Введение

Главная цель данной работы — решение поставленной А. Н. Скибой задачи 16.82 из «Коуровской тетради» [1] (см. также задачу 1.2.18 из [2]) об описании наследственных формаций $\mathfrak{X}$, для которых ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна и не превосходит $|\pi(\mathfrak{X})|$, где $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{X}$.

Нами рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения из [3, 4]. Напомним основные из них.

Пусть A, B — группы, $\varphi : A \to B$ — эпиморфизм и Ω и Σ — некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. Обозначим через Ω^φ множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$ образов в B всех подгрупп из Ω, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, θ — отображение, ставящее в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [3], будем говорить, что θ — *подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор* (или, иначе, θ — *подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$*), если выполняется следующее условие абстрактности:

$$(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$$

для любого изоморфизма φ каждой группы G из $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор будем называть просто *подгрупповым функтором.*

Иногда приходится рассматривать действие подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора не на всем классе $\mathfrak{X}$, а лишь на некоторой его части. Пусть $\mathfrak{M}$ — подкласс класса $\mathfrak{X}$ и θ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор. Пусть $\theta_1(G) = \theta(G)$ для каждой группы G из $\mathfrak{M}$. Тогда, очевидно, θ_1 — подгрупповой $\mathfrak{M}$-функтор. Этот функтор называется *ограничением функтора θ на $\mathfrak{M}$*. При этом применяется запись $\theta_1 = \theta|_{\mathfrak{M}}$.

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется:

1) *регулярным*, если $(\theta(A))^\varphi \subseteq \theta(B)$ и $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ для любого эпиморфизма φ: $A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$;

2) *транзитивным*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $S \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G) \cap \mathfrak{X}$ следует $S \in \theta(G)$.

Замечание. В терминологии, принятой в монографии [2], под подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором понимается всегда регулярный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, а транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называется *замкнутым*.

Множество всех регулярных транзитивных подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов обозначим через $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$. На этом множестве определим операцию пересечения следующим образом:

$$(\theta_1 \cap \theta_2)(G) = \theta_1(G) \cap \theta_2(G)$$

для любых двух подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов θ_1 и θ_2 из $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ и любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ — полная решетка относительно частичного порядка, определяемого теоретико-множественным включением ($\theta_1 \leq \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$).

Как отмечено в [2], между классом групп $\mathfrak{X}$ и решетками подгрупповых $\mathfrak{X}$-функторов порой существует достаточно тесная связь. В частности, в случае формации $\mathfrak{X}$ решетка $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ является цепью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ состоит из p-групп для некоторого простого числа p (см., например, [3]). В связи с этим результатом А. Н. Скибой сформулирован следующий

Вопрос [1, вопрос 16.82]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и конечных прямых произведений. Существует ли ненильпотентный класс $\mathfrak{X}$, для которого ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна и не превосходит $|\pi(\mathfrak{X})|$, где $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых делителей порядков групп в $\mathfrak{X}$?*

В данной работе дается отрицательный ответ на этот вопрос. Так как каждый класс групп $\mathfrak{X}$, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и конечных прямых произведений, является наследственной формацией, отсюда, в частности, следует, что всякая наследственная формация, для которой ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна и не превосходит $|\pi(\mathfrak{X})|$, является нильпотентной.

При обращении к решеткам используется терминология, принятая в [5]. Пусть L — решетка. Подмножество $\Sigma \subseteq L$ называется *антицепью* в L, если для любых различных элементов a и b из L выполняется $a \not\leq b$ и $b \not\leq a$. Если Σ — антицепь в L такая, что $|\Sigma_1| \leq |\Sigma|$ для любой другой антицепи $\Sigma_1 \subseteq L$, то кардинальное число $|\Sigma|$ называется *шириной* решетки L. В частности, если ширина решетки L конечна, то она равна максимальному числу попарно не сравнимых элементов из L.

Отметим еще, что частные аспекты задачи 16.82 рассматривались в работе [6].

2. Вспомогательные леммы

Важную роль в работе играет понятие примитивной группы. Напомним, что группа G называется *примитивной*, если она обладает максимальной подгруппой M, ядро $\mathrm{Core}_G(M)$ которой единично (т. е. $\mathrm{Core}_G(M) = 1$). В этом случае максимальная подгруппа M называется *примитиватором* группы G. Понятно, что если B — максимальная подгруппа группы A, то группа $A/\mathrm{Core}_A(B)$ примитивна и $B/\mathrm{Core}_A(B)$ — примитиватор группы $A/\mathrm{Core}_A(B)$. Строение примитивных групп описано Бэром в работе [7].

Ниже, в определениях 1 и 2 и леммах 1–3, H — фиксированная примитивная группа.

Определение 1. Максимальная подгруппа M группы G называется *H-нормальной*, если $G/\operatorname{Core}_G(M) \simeq H$.

Определение 2. Подгруппа R группы G называется *H-субнормальной*, если либо $R = G$, либо существует максимальная цепь

$$R = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = G$$

такая, что M_{i-1} — H-нормальная максимальная подгруппа группы M_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 1. *Если R — H-субнормальная подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$, то RN/N — H-субнормальная подгруппа группы G/N.*

Доказательство. Так как подгруппа R является H-субнормальной в G, то по определению либо $R = G$, либо существует максимальная цепь

$$R = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n = G$$

такая, что $R_i/\operatorname{Core}_{R_i}(R_{i-1}) \simeq H$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим цепь

$$RN/N = R_0N/N \subseteq R_1N/N \subseteq \dots \subseteq R_nN/N = G/N. \qquad (*)$$

Пусть $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда из максимальности подгруппы R_{k-1} в группе R_k и равенства $R_{k-1}N = R_{k-1}(R_k \cap N)N$ следует, что возможен один из двух случаев:

1) $R_k \cap N$ не содержится в R_{k-1}, тогда $R_{k-1}(R_k \cap N) = R_k$, а значит, $R_{k-1}N = R_kN$;

2) $R_k \cap N \subseteq R_{k-1}$, тогда $R_{k-1} \cap N = R_k \cap N$.

Пусть $R_{k-1}N$ — собственная подгруппа группы R_kN. Так как $R_{k-1} \cap N = R_k \cap N$, то $R_{k-1}/R_{k-1} \cap N = R_{k-1}/R_k \cap N$ — максимальная подгруппа группы $R_k/R_k \cap N$. Ввиду изоморфизмов

$$R_{k-1}/R_{k-1} \cap N \simeq R_{k-1}N/N, \quad R_k/R_k \cap N \simeq R_kN/N$$

$R_{k-1}N$ — максимальная подгруппа группы R_kN.

Обозначим подгруппу $\operatorname{Core}_{R_kN}(R_{k-1}N)$ через C. Тогда в силу тождества Дедекинда имеем $(C \cap R_k)N = C \cap R_kN = C$, $(C \cap R_{k-1})N = C \cap R_{k-1}N = C$. Таким образом, $(C \cap R_{k-1})N = (C \cap R_k)N$. Отсюда следует, что

$$(C \cap R_{k-1})N/N = (C \cap R_k)N/N.$$

Поэтому из изоморфизмов

$$(C \cap R_{k-1})N/N \simeq C \cap R_{k-1}/C \cap R_{k-1} \cap N,$$

$$(C \cap R_k)N/N \simeq C \cap R_k/C \cap R_k \cap N$$

заключаем, что

$$C \cap R_{k-1}/C \cap R_{k-1} \cap N \simeq C \cap R_k/C \cap R_k \cap N.$$

В частности,

$$|C \cap R_{k-1}/C \cap R_{k-1} \cap N| = |C \cap R_k/C \cap R_k \cap N|.$$

Кроме того, на основании равенства $R_{k-1} \cap N = R_k \cap N$ имеем включение

$$C \cap R_{k-1}/C \cap R_k \cap N \subseteq C \cap R_k/C \cap R_k \cap N.$$

Поэтому

$$C \cap R_{k-1}/C \cap R_k \cap N = C \cap R_k/C \cap R_k \cap N,$$

а значит, $C \cap R_{k-1} = C \cap R_k$. Отсюда следует, что $C \cap R_{k-1}$ — нормальная подгруппа группы R_k. Тем самым $C \cap R_k \subseteq \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})$. Стало быть,

$$C = (C \cap R_k)N \subseteq \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N.$$

Так как включение $\operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N \subseteq C$ очевидно, то $C = \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N$.

Поскольку $R_{k-1} \cap N = R_k \cap N \subseteq \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})$, то

$$\begin{aligned} R_k/\operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1}) &= R_k/\operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})(R_k \cap N) = R_k/R_k \cap \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N \\ &\simeq R_k \operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N/\operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1})N = R_kN/C \\ &\simeq R_kN/N/\operatorname{Core}_{R_kN}(R_{k-1}N)/N = R_kN/N/\operatorname{Core}_{R_kN/N}(R_{k-1}N/N). \end{aligned}$$

Отсюда и из изоморфизма $R_k/\operatorname{Core}_{R_k}(R_{k-1}) \simeq H$ следует, что $R_{k-1}N/N$ — H-нормальная максимальная подгруппа группы R_kN/N.

Итак, в ряду $(*)$ для любого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ либо $R_{k-1}N/N = R_kN/N$, либо $R_{k-1}N/N$ — H-нормальная максимальная подгруппа группы R_kN/N. Выбрасывая из ряда $(*)$ повторения, получаем, что RN/N — H-субнормальная подгруппа группы G/N. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $N \trianglelefteq G$ и R/N — H-субнормальная подгруппа группы G/N, то R — H-субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Из определения H-субнормальной подгруппы в случае $R/N \neq G/N$ следует, что существует максимальная цепь

$$R/N = R_0/N \subset R_1/N \subset \dots \subset R_n/N = G/N$$

такая, что $R_i/N/\operatorname{Core}_{R_i/N}(R_{i-1}/N) \simeq H$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Так как

$$\operatorname{Core}_{R_i/N}(R_{i-1}/N) = \operatorname{Core}_{R_i}(R_{i-1})/N,$$

ввиду изоморфизма

$$R_i/N/\operatorname{Core}_{R_i/N}(R_{i-1}/N) \simeq R_i/\operatorname{Core}_{R_i}(R_{i-1})$$

в цепи $R = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n = G$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$ подгруппа R_{i-1} является H-нормальной максимальной подгруппой из R_i, т. е. подгруппа R является H-субнормальной в G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть θ — отображение, которое сопоставляет каждой группе G все ее H-субнормальные подгруппы. Тогда θ — регулярный транзитивный подгрупповой функтор.*

Доказательство. Очевидно, что

$$G^{\varphi}/\operatorname{Core}_{G^{\varphi}}(M^{\varphi}) \simeq G/\operatorname{Core}_G(M) \simeq H$$

для любого изоморфизма $\varphi : G \to G^{\varphi}$ и любой H-нормальной максимальной подгруппы M группы G. Поэтому θ — подгрупповой функтор. Ввиду лемм 1 и 2 подгрупповой функтор θ регулярен. Транзитивность θ очевидна. Лемма доказана.

В дальнейшем подгрупповой функтор θ из леммы 3 будем называть *H-субнормальным* и обозначать его через sub_H.

3. Решение задачи 16.82

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация. Если H_1 и H_2 — неизоморфные примитивные группы, принадлежащие формации $\mathfrak{X}$, то подгрупповые $\mathfrak{X}$-функторы $\mathrm{sub}_{H_1}|_{\mathfrak{X}}$ и $\mathrm{sub}_{H_2}|_{\mathfrak{X}}$ несравнимы в решетке $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Пусть $G = H_1 \times H_2$ и $M_1 = D_1H_2$, $M_2 = H_1D_2$, где D_1 — примитиватор группы H_1, D_2 — примитиватор группы H_2. Ввиду условия леммы $G \in \mathfrak{X}$. Обозначим $\theta_1 = \mathrm{sub}_{H_1}|_{\mathfrak{X}}$, $\theta_2 = \mathrm{sub}_{H_2}|_{\mathfrak{X}}$. Так как $G/\operatorname{Core}_G(M_1) = H_1H_2/H_2 \simeq H_1$, то $M_1 \in \theta_1(G)$. Аналогично $M_2 \in \theta_2(G)$. В силу условия леммы группы H_1 и H_2 неизоморфны. Поэтому $M_1 \notin \theta_2(G)$, $M_2 \notin \theta_1(G)$. Следовательно, $\theta_1 \not\leq \theta_2$ и $\theta_2 \not\leq \theta_1$. Значит, $\mathfrak{X}$-функторы θ_1 и θ_2 несравнимы в решетке $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

Далее нильпотентный класс — это класс, состоящий из нильпотентных групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация и $|\pi(\mathfrak{X})| = n$. Если формация $\mathfrak{X}$ ненильпотентна, то ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ больше n.*

Доказательство. Пусть $\pi(\mathfrak{X}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Так как формация $\mathfrak{X}$ замкнута относительно взятия подгрупп, то $\mathfrak{X}$ содержит циклическую группу Z_{p_i} для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Кроме того, из замкнутости класса $\mathfrak{X}$ относительно взятия гомоморфных образов следует, что ненильпотентный класс $\mathfrak{X}$ содержит по крайней мере одну неабелеву примитивную группу H. Рассмотрим подгрупповые $\mathfrak{X}$-функторы $\mathrm{sub}_H|_{\mathfrak{X}}$ и $\mathrm{sub}_{Z_{p_i}}|_{\mathfrak{X}}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ввиду леммы 3 эти $\mathfrak{X}$-функторы регулярны и транзитивны. На основании леммы 4 они попарно несравнимы в решетке $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$. Следовательно, ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ не меньше $n+1$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов, подгрупп и конечных прямых произведений. Если ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна и не превосходит $|\pi(\mathfrak{X})|$, где $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ является нильпотентным.*

4. Нильпотентный случай

Из доказательства теоремы 1, в частности, следует, что если $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация и ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ конечна, то эта ширина не меньше $|\pi(\mathfrak{X})|$. Опишем все наследственные формации $\mathfrak{X}$, для которых ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ в точности равна $|\pi(\mathfrak{X})|$, а также установим строение этой решетки. На основании следствия из теоремы 1 такие формации надо искать среди нильпотентных классов групп.

Следуя [8], *характеристикой* подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора θ будем называть множество всех простых чисел p, для которых $1 \in \theta(Z_p)$, где Z_p — циклическая группа порядка p, принадлежащая классу $\mathfrak{X}$. Характеристику подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора будем в дальнейшем обозначать через $\pi(\theta)$.

Ниже, без всяких ссылок, мы будем опираться на результат Неймана из [9] о том, что каждая нильпотентная формация является наследственной.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая нильпотентная формация. Если θ — регулярный транзитивный подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор и $\pi = \pi(\theta)$, то для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$\theta(G) = \{H \mid \pi(|G : H|) \subseteq \pi\}.$$

Доказательство. Пусть H — подгруппа в $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $|G : H|$ — π-число. Так как группа G нильпотентна, существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n = G,$$

в которой $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ и $|H_{i-1} : H_i|$ — простое число из π для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $\mathfrak{X}$-функтор θ регулярен, из определения характеристики подгруппового функтора следует, что $1 = H_{i-1}/H_{i-1} \in \theta(H_i/H_{i-1})$, а значит, $H_{i-1} \in \theta(H_i)$. Ввиду транзитивности $\mathfrak{X}$-функтора θ имеем, что $H \in \theta(G)$. Значит, $\{H \mid \pi(|G : H|) \subseteq \pi\} \subseteq \theta(G)$.

Пусть теперь $D \in \theta(G)$ и p — простое число, делящее индекс $|G : D|$. Если N — холлова p'-подгруппа группы $G \in \mathfrak{X}$, то ввиду нильпотентности группы G подгруппа N нормальна в G. Из регулярности $\mathfrak{X}$-функтора θ следует, что $DN \in \theta(G)$, а значит, найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $DN \subseteq M$ и $M \in \theta(G)$. Кроме того, из $M \trianglelefteq G$ и $|G : DN| = p^{\alpha}$ следует, что $G/M \simeq Z_p$. Значит, $1 = M/M \in \theta(G/M)$, поэтому $p \in \pi$. Итак, $|G : D|$ — π-число, и, следовательно, $\theta(G) \subseteq \{D \mid \pi(|G : D|) \subseteq \pi\}$. Лемма доказана.

Пусть X — некоторое множество. Напомним, что через $P(X, \cap, \cup)$ обозначается решетка всех подмножеств множества X.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая нильпотентная формация. Если $|\pi(\mathfrak{X})| = n$ и X — n-элементное множество, то $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X}) \simeq P(X, \cap, \cup)$.*

Доказательство. Покажем, что отображение $\varphi : \theta \to \pi(\theta)$, ставящее в соответствие каждому регулярному транзитивному подгрупповому $\mathfrak{X}$-функтору θ его характеристику $\pi(\theta)$, является искомым изоморфизмом решеток $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ и $P(X, \cap, \cup)$.

Пусть θ_1, $\theta_2 \in \mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$. Тогда для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ ввиду леммы 5 справедливы равенства

$$\theta_1(G) = \{H \mid \pi(|G : H|) \subseteq \pi(\theta_1)\}, \quad \theta_2(G) = \{D \mid \pi(|G : D|) \subseteq \pi(\theta_2)\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(\theta_1 \wedge \theta_2)(G) &= \theta_1(G) \cap \theta_2(G) \\ &= \{H \mid \pi(|G : H|) \subseteq \pi(\theta_1)\} \cap \{D \mid \pi(|G : D|) \subseteq \pi(\theta_2)\} \\ &= \{S \mid \pi(|G : S|) \subseteq \pi(\theta_1) \cap \pi(\theta_2)\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(\theta_1 \wedge \theta_2) = \pi(\theta_1 \cap \theta_2) = \pi(\theta_1) \cap \pi(\theta_2) = \varphi(\theta_1) \cap \varphi(\theta_2).$$

Так как $\theta_1 \vee \theta_2 = \bigcap \{\theta \in \mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X}) \mid \theta_1 \leq \theta, \theta_2 \leq \theta\}$, из определения характеристики подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора следует, что $\pi(\theta_1 \vee \theta_2) = \pi(\theta_1) \cup \pi(\theta_2)$. Отсюда $\varphi(\theta_1 \vee \theta_2) = \pi(\theta_1 \vee \theta_2) = \varphi(\theta_1) \cup \varphi(\theta_2)$.

Кроме того, на основании леммы 5 отображение φ является биекцией множеств $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ и $P(X, \cap, \cup)$. Значит, φ — изоморфизм решеток $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ и $P(X, \cap, \cup)$. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы вытекает из свойств решетки $P(X, \cap, \cup)$.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая нильпотентная формация. Если $|\pi(\mathfrak{X})| = n$, то справедливы следующие утверждения:*

1) *решетка $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ содержит 2^n элементов;*
2) *длина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна $n + 1$;*
3) *ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна C_n^k, где k — целая часть числа $n/2$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация и $|\pi(\mathfrak{X})| = n$. Ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна n тогда и только тогда, когда формация $\mathfrak{X}$ нильпотентна и $n \leq 3$.*

Доказательство. Пусть ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна n. Тогда ввиду теоремы 1 формация $\mathfrak{X}$ нильпотентна. На основании леммы 7 ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где k — целая часть числа $\frac{n}{2}$. Отсюда из равенства $C_n^k = n$ получаем, что $n \leq 3$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — нильпотентная формация и, кроме того, $|\pi(\mathfrak{X})| = n \leq 3$. На основании леммы 7 имеем:

1) при $n = 1$ ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна 1;

2) при $n = 2$ ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна 2;

3) при $n = 3$ ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ равна 3.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация и $|\pi(\mathfrak{X})| = n$. Если $n > 3$, то ширина решетки $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ больше n.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая наследственная формация. Решетка $\mathrm{Reg}_{\mathrm{tr}}(\mathfrak{X})$ является цепью тогда и только тогда, когда найдется простое число p такое, что каждая группа из $\mathfrak{X}$ является p-группой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь*: Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2006.
2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.
3. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
6. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* О решетках подгрупповых и подсистемных функторов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 710–730.
7. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Ill. J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
8. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф.* О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 30–40.
9. *Neumann P. M.* A note on formations of finite nilpotent groups // Bull. London Math. Soc. 1970. V. 2, N 1. P. 91.

Статья поступила 4 сентября 2009 г.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений,
кафедра математики и информационных технологий,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru