Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Академик АН МССР В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. М. РЯБУХИН

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРОСТЫХ

Вопросы разложения элементов частично упорядоченных алгебраических систем в пересечение простых (объединение неразложимых) элементов рассматривались в ряде работ и монографий (см. ([1–6]), где приведена библиография). При этом, как правило, указывалось лишь достаточное условие существования и доказывалась только теорема единственности получающихся разложений.

В настоящей заметке указанные вопросы рассматриваются для $\wedge$-полурешеток и мультипликативных $\wedge$-полурешеток. Для заданного элемента этих полурешеток указывается критерий его разложимости в пересечение простых элементов (определения см. ниже). В качестве приложения рассмотрены соответствующие вопросы для импликативной полурешетки ([7, 8]), решетки идеалов кольца и нормальных делителей группы. Используя обычную двойственность частично упорядоченных алгебраических систем, легко получить соответствующие утверждения о разложении элементов частично упорядоченных алгебраических систем в объединение неразложимых элементов.

$\wedge$-полурешеткой называется такое частично упорядоченное множество R, что для любых $a, b \in R$ существует пересечение $a \wedge b \in R$. Мы выбираем и фиксируем некоторую $\wedge$-полурешетку R с наибольшим элементом 1. Элемент $p \in R$ называется $\wedge$-простым, если для любых $x, y \in R$ включение $x \wedge y \leqslant p$ влечет $x \leqslant p$ или $y \leqslant p$. Если $a, b \in R$, то $\wedge$-частным (или псевдодополнением) элемента a по элементу b называется наибольший среди всех таких $x \in R$, что $b \wedge x \leqslant a$. Элемент $a \in R$ называется $\wedge$-делимым, если для любого $b \in R$ $\wedge$-частное $d(a, b)$ существует. Легко видеть, что если элемент $a \in R$ $\wedge$-делим, то включение $b \leqslant a$ равносильно равенству $d(a, b) = 1$. В связи с этим $\wedge$-частное $d(a, b)$ называется собственным, если $b \nleqslant a$.

Разложение $a = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ элемента $a \in R$ назовем несократимым, если в этом разложении нет лишних членов, т. е. если $1 \leqslant j \leqslant n$, то $a \neq \bigwedge_{i \neq j} a_i$. Ниже мы будем рассматривать только конечные пересечения.

Теорема 1. *Если* $a = \bigwedge_{i=1}^{n} b_i = \bigwedge_{j=1}^{m} c_j$ *— два несократимых разложения элемента* $a \in R$ *в пересечение* $\wedge$*-простых элементов, то* $m = n$ *и* $b_i = c_{i\sigma}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *для некоторой перестановки* σ.

Теорема 2. *Пусть* $a \in R$, $a \neq 1$, *причем элемент* a *разлагается в пересечение* $\wedge$*-простых элементов.*

Тогда a $\wedge$*-делим и имеет лишь конечное число* $\wedge$*-частных.*

Если $a = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i$ *— несократимое разложение элемента* a *в пересечение* $\wedge$*-простых элементов* p_i, *то для любого* $p \in R$ *следующие утверждения эквивалентны*:

а) $p = p_i$ *для некоторого* $\wedge$*-простого элемента* p_i,

б) p *— минимальный* $\wedge$*-простой элемент, содержащий* a,

в) p *— максимальное собственное* $\wedge$*-частное элемента* a.

Теорема 3. *Элемент* $a \in R$ *разлагается в пересечение* $\wedge$*-простых элементов тогда и только тогда, когда он* $\wedge$*-делим и выполняется условие обрыва возрастающих (или убывающих) цепей* $\wedge$*-частных этого элемента.*

Напомним, что $\wedge$-полурешетка R называется импликативной, если все ее элементы $\wedge$-делимы ([7]).

Следствие 1. *Элемент* a *импликативной полурешетки* R *разлагается в пересечение* $\wedge$*-простых элементов тогда и только тогда, когда выполняется условие обрыва возрастающих (или убывающих) цепей* $\wedge$*-частных элемента* a*. Это равносильно конечности множества* $\wedge$*-частных элемента* a*.*

$\wedge$-полурешетку R назовем мультипликативной $\wedge$-полурешеткой, если R — группоид, причем для всех $x, y \in R$ верно включение $xy \leqslant x \wedge y$ и соотношения $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ всегда влекут $ac \leqslant bd$. Выберем и зафиксируем некоторую мультипликативную $\wedge$-полурешетку R. Как и выше, будем считать, что в R есть наибольший элемент 1.

Элемент $p \in R$ называется простым, если для любых $x, y \in R$ включение $xy \leqslant p$ влечет $x \leqslant p$ или $y \leqslant p$. Если $a, b \in R$, то частным элемента a по элементу b называется наибольший из элементов $x \in R$ таких, что $bx \leqslant a \geqslant xb$. Элемент $a \in R$ называется делимым, если частное $a : b$ существует для любого $b \in R$. Частное $a : b$ называется собственным, если $b \nleqslant a$. Элемент $q \in R$ называется полупростым, если для любого $x \in R$ включение $x^2 \leqslant q$ влечет $x \leqslant q$.

Ясно, что любой простой элемент $\wedge$-прост.

Теорема 4. *Пусть* $q \in R$, $q \neq 1$, *причем элемент* q *разлагается в пересечение простых.*

Тогда q *полупрост, делим и имеет лишь конечное число частных.*

Если $q = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i$ — *несократимое разложение в пересечение простых элементов, то следующие утверждения равносильны для любого элемента* $p \in R$:

а) $p = p_i$ *для некоторого простого элемента* p_i,

б) p — *минимальный простой элемент, содержащий* q,

в) p — *максимальное собственное частное для* q.

Теорема 5. *Элемент* q *разлагается в пересечение простых элементов тогда и только тогда, когда он полупрост, делим и выполняется условие обрыва возрастающих (или убывающих) цепей частных элемента* q.

Доказательство основных теорем использует некоторые свойства частных (см., например, ([1], [6])) и приводимые леммы.

Лемма 1. *Пусть* $p \in R$, $p \neq 1$. *Элемент* p $\wedge$*-прост тогда и только тогда, когда он* $\wedge$*-делим и его единственным собственным* $\wedge$*-частным является сам элемент* p.

Лемма 2. *Пусть* $p \in R$, $p \neq 1$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *элемент* p *прост,*

2) *элемент* p *полупрост и* $\wedge$*-прост,*

3) *элемент* p *делим и его единственным собственным частным является сам элемент* p.

Лемма 3. *Пусть элемент* $q \in R$ *полупрост. Элемент* q *делим тогда и только тогда, когда он* $\wedge$*-делим. При этом* $q : b = d(q, b)$ *для всех* $b \in R$.

Лемма 4. *Пусть элемент* $q \in R$ *полупрост и делим.*

Тогда и все частные элемента q *полупросты и делимы, причем* $(q : a) : b = q : (a \wedge b)$ *для всех* $a, b \in R$.

Лемма 5. *Следующие утверждения равносильны:*

α) *все элементы из* R *полупросты;*

β) *все элементы из* R *идемпотентны, т. е.* $a = a^2$ *для любого* $a \in R$;

γ) $xy = x \wedge y$ *для всех* $x, y \in R$.

Следствие 2. *Для того чтобы все элементы из R разлагались в пересечение простых элементов, необходимо и достаточно, чтобы все они были идемпотентны, делимы и для любого $a \in R$ выполнялось условие обрыва возрастающих (или убывающих) цепей частных этого элемента.*

Укажем некоторые приложения полученных результатов.

Пусть K — произвольное не обязательно ассоциативное кольцо. Символом (x) будем обозначать главный идеал кольца K, порожденный элементом (x). Аннулятором будем называть любое множество вида $O : A = \{x \in K \mid (x)a = a(x) = 0$ для всех $a \in A\}$, где A — идеал кольца K. Кольцо K будет первичным тогда и только тогда, когда $O : A = 0$ для любого ненулевого идеала A в K. Идеал P кольца K будет простым тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $K|P$ первично. Скажем, что K — кольцо без ненулевых нильпотентных идеалов, если $O : A \not\geqslant A$ для любого ненулевого идеала A, т. е. $A^2 \neq 0$.

Напомним, что кольцо K является подпрямой суммой колец K_i, $i \in I$, если существуют такие идеалы P_i в K, что $K|P_i \approx K_i$ и $\bigcap_{i \in I} P_i = 0$. Конечная подпрямая сумма колец K_i называется несократимой, если разложение $O = \bigcap_{i \in I} P_i$ несократимо.

Следствие 3. *Кольцо K является конечной подпрямой суммой первичных колец тогда и только тогда, когда оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов и удовлетворяет условию обрыва возрастающих (или убывающих) цепей аннуляторов. Если K — несократимая подпрямая сумма первичных колец K_i, то множество $\{P_i \mid i \in I\}$ соответствующих идеалов совпадает с множеством всех минимальных простых идеалов кольца K.*

Ассоциативное кольцо K называется бирегулярным, если любой его главный идеал порождается центральным идемпотентом, т. е. является кольцом с единицей.

Следствие 4. *Бирегулярное кольцо K разлагается в конечную прямую сумму простых колец с единицей тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих (или убывающих) цепей аннуляторов.*

Пусть G — произвольная группа. Централизатором будем называть любое множество вида $\mathfrak{Z}(A) = \{g \in G \mid ga = ag$ для всех $a \in A\}$, где A — нормальный делитель в G. Группа G называется первичной, если $\mathfrak{Z}(A) = E$ для любого неединичного нормального делителя A. Нормальный делитель P группы G будет простым тогда и только тогда, когда фактор-группа $G|P$ первична.

Следствие 5. *Группа G является конечной подпрямой суммой первичных групп тогда и только тогда, когда она не имеет абелевых нормальных делителей и удовлетворяет условию обрыва возрастающих (или убывающих) цепей централизаторов.*

Учитывая аналогию между кольцами с единицей (ассоциативными) и совершенными группами ([10]), нетрудно найти и аналог следствия 4 для групп.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
19 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы, М., 1965. [2] G. Birkhoff, Lattice Theorie, Am. Math. Soc., 25 (1967). [3] G. Szasz, Introduction to Lattice Theorie, Budapest, 1963. [4] V. Kurata, Osaka J. Math., 1, № 2, 201 (1964). [5] V. Kurata, Math. Zs., 88, № 2, 129 (1965). [6] В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 5, 1057 (1967). [7] Х. Карри, Основания математической логики, М., 1969. [8] В. А. Янков, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 1, 18 (1969). [9] O. Steinfeld, Acta Math. Csi. Hung., 19, № 3—4, 243 (1968). [10] А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», 1967.