Сибирский математический журнал
Июль—август, 2024. Том 65, № 4

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С G–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

С. Ф. Каморников,
В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Пусть A, B — подгруппы конечной группы G. Тогда A называется (наследственно) G-перестановочной с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$ (для некоторого элемента $x \in \langle A, B\rangle$). Подгруппа A группы G называется (наследственно) G-перестановочной в G, если A (наследственно) G-перестановочна со всеми подгруппами из G. В работе исследуется строение конечной группы G, все нормализаторы силовских подгрупп которой являются (наследственно) G-перестановочными.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.404

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, нормализатор силовской подгруппы, G-перестановочная подгруппа, наследственно G-перестановочная подгруппа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Следующая концепция, развивающая понятие квазиперестановочной подгруппы (см. [1]), предложена в работе [2].

Определение 1. Пусть A, B — подгруппы группы G. Тогда A называется:

(1) *G-перестановочной* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$;

(2) *наследственно G-перестановочной* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in \langle A, B\rangle$.

Определение 2. Подгруппа A группы G называется (*наследственно*) *G-перестановочной в* G, если A (наследственно) G-перестановочна со всеми подгруппами из G.

G-перестановочные и наследственно G-перестановочные подгруппы в последнее время нашли ряд интересных приложений, связанных с изучением нормальной структуры конечной группы и установлением условий ее не простоты [3–6]. Например, в [3] доказана разрешимость группы, у которой все минимальные подгруппы являются наследственно G-перестановочными (под *минимальной* подгруппой группы G понимается любая ее подгруппа простого порядка). В [4] доказано, что если S — силовская 2-подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа из S является наследственно G-перестановочной в G, то G разрешима. В работах [5, 6] исследовано нормальное и формационное строение группы, у которой любая подгруппа Шмидта является наследственно

Исследования первого и второго авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-237).

G-перестановочной (*подгруппой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны).

В данной работе исследуется строение группы G, все нормализаторы силовских подгрупп которой являются (наследственно) G-перестановочными.

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если нормализатор каждой силовской подгруппы группы G является G-перестановочным в G, то группа G разрешима.*

Теорема 2. *Если нормализатор каждой силовской подгруппы группы G является наследственно G-перестановочным в G, то группа G сверхразрешима.*

2. Используемая терминология и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения (см., например, [7]). Напомним лишь некоторые из них:

• $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G;

• если p — некоторое простое число, то G_p — силовская p-подгруппа группы G, а $Syl_p(G)$ — множество всех ее силовских p-подгрупп;

• $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G;

• $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;

• $G^{\mathfrak{U}}$ — $\mathfrak{U}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой сверхразрешима.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения:

• $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;

• $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B.

Отметим следующее свойство G-перестановочных подгрупп, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. *Пусть G — группа, H, T и K — ее подгруппы, причем подгруппа K нормальна в G. Если $K \subseteq T$ и H G-перестановочна с T, то HK/K G/K-перестановочна с T/K. В частности, если подгруппа H наследственно G-перестановочна в G, то подгруппа HK/K наследственно G/K-перестановочна в G/K.*

При доказательстве теоремы 1 будем опираться на следующие результаты о строении некоторых простых групп.

Лемма 2 [8, лемма 1.6]. *Пусть G — простая группа лиева типа и L — максимальная подгруппа группы G. Если унипотентная подгруппа U содержится в L, то L — параболическая подгруппа G.*

Лемма 3 [9, лемма 3]. *Пусть G — простая группа лиева типа и*

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядок ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

Лемма 4 [10, следствие 5]. *Пусть $G \in \{A_n, S_n\}$, где $n \geq 5$. Предположим, что $G = AB$, где A и B — максимальные подгруппы группы G, не содержащие A_n. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *$A = (S_{n-k} \times S_k) \cap G$ для некоторого k такого, что $1 \leq k \leq 5$, а B является k-однородной;*

(ii) *$n = 6$, $A = PGL_2(5) \cap G$ и $B = (S_3 \wr S_2) \cap G$.*

Понадобятся также следующие два результата теории чисел.

Лемма 5 [11, лемма 1.1]. *Пусть n — целое число и $n \geq 9$. Тогда существуют по меньшей мере три таких простых числа r, что $n < r < 2n$.*

Лемма 6 [12]. *Пусть p и q — простые числа, m и n — натуральные числа, причем $p^m = q^n + 1$. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ и $m = 2$;*

(2) *$q = 2$, $m = 1$, n является степенью числа 2, а $p = q^n + 1$ — простое число Ферма;*

(3) *$p = 2$, $n = 1$ и $q = p^m - 1$ — простое число Мерсенна, в частности, m является простым числом.*

Следуя [13], подгруппу H группы G будем называть $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим следующее свойство наследственно G-перестановочных подгрупп, устанавливающее их связь с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами.

Лемма 7 [6, лемма 2.8]. *Любая наследственно G-перестановочная подгруппа разрешимой группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной.*

Требование разрешимости группы G в лемме 7 существенно и в общем случае его отбросить нельзя. Пусть, например, $G = A \times B$, где A — абелева группа, B — простая неабелева группа, не содержащая максимальных подгрупп простого индекса. Очевидно, подгруппа A наследственно G-перестановочна в G, но не $\mathbb{P}$-субнормальна.

В [13] введен и исследован класс групп $w\mathfrak{U}$, все силовские подгруппы которых $\mathbb{P}$-субнормальны. Одно из свойств этого класса мы приведем в виде леммы. Напомним только, что если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то группа G называется $\mathfrak{F}$-*критической*, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{U}$-критическая группа — это минимальная несверхразрешимая группа.

Лемма 8 [13, теорема 2.9]. *Любая $w\mathfrak{U}$-критическая группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой.*

Основные свойства минимальных несверхразрешимых групп приведены в работах [14, 15]. Одна из полных классификаций минимальных несверхразрешимых групп содержится в [16].

Лемма 9 [14, 15]. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

2) *$G^{\mathfrak{U}}$ — силовская p-подгруппа группы G для некоторого простого p;*

3) *$G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ — главный фактор группы G;*

4) *$|G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})| = p^n$, где $n > 1$;*

5) *$\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = G^{\mathfrak{U}} \cap \Phi(G)$.*

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Предположим сначала, что группа G простая. Опираясь на классификацию простых неабелевых групп, исключим каждый из возможных случаев.

(a) *G — простая спорадическая группа.*

В работе [23] доказано, что если G — простая спорадическая группа, содержащая собственную G-перестановочную подгруппу F, то $G = J_1$ и $|F| = 2$. Отсюда имеем противоречие с условием теоремы.

(b) *$G \cong A_n$, где $n \geq 5$.*

Сначала рассмотрим случаи, когда $n \leq 16$. При этом для $n \leq 13$ укажем в группе G силовскую p-подгруппу P, нормализатор которой не перестановочен ни с одной силовской q-подгруппой группы G:

- если $G \in \{A_5, A_6\}$, то $P \in Syl_5(G)$ и $q = 2$;
- если $G \cong A_7$, то $P \in Syl_7(G)$ и $q = 2$ [17, с. 10];
- если $G \in \{A_8, A_9, A_{10}\}$, то $P \in Syl_7(G)$ и $q = 5$ [17, с. 22, 37, 48];
- если $G \in \{A_{11}, A_{12}\}$, то $P \in Syl_{11}(G)$ и $q = 7$ [17, с. 75, 91];
- если $G \cong A_{13}$, то $P \in Syl_{13}(G)$ и $q = 11$ [17, с. 91].

В оставшихся случаях $n = 14, 15, 16$ в группе $G \cong A_n$ укажем максимальную подгруппу M, которая согласно лемме 4 не является сомножителем ни в одной факторизации, и силовскую подгруппу P, нормализатор которой не содержится ни в одной подгруппе, сопряженной с M (отсюда сразу же следует противоречие с условием теоремы):

- если $n = 14$, то $M = (A_6 \times A_8).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$;
- если $n = 15$, то $M = (A_7 \times A_8).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$;
- если $n = 16$, то $M = (A_7 \times A_9).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$.

Пусть далее $n = 2k + 1 \geq 17$. В качестве максимальной подгруппы рассмотрим подгруппу $M = (A_{(n-1)/2} \times A_{(n+1)/2}).2$. В этом случае $(n + 1)/2 \geq 9$. По лемме 5 существуют три различных простых числа $r_1 < r_2 < r_3$ таких, что $(n+1)/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n+1$. Отсюда следует, что $(n+1)/2 < r_1 < r_2 < n$. При этом $(|M|, r_1) = (|M|, r_2) = 1$. Следовательно, $G = MN_G(R_1)$ для $R_1 \in Syl_{r_1}(G)$. Так как $(n - 1)/2 \geq 8$, последнее невозможно ввиду леммы 4.

Пусть $n = 2k \geq 18$. В качестве максимальной подгруппы рассмотрим подгруппу $M = (A_{n/2-1} \times A_{n/2+1}).2$. В этом случае $n/2 \geq 9$. По лемме 5 существуют три различных простых числа $r_1 < r_2 < r_3$ таких, что $n/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n$. Отсюда следует, что $n/2 + 1 < r_2 < r_3 < n$. При этом $(|M|, r_2) = (|M|, r_3) = 1$. Следовательно, $G = MN_G(R_2)$ для $R_2 \in Syl_{r_2}(G)$. Так как $n/2 - 1 \geq 8$, последнее невозможно ввиду леммы 4.

(c) *G — простая группа лиева типа над полем характеристики p.*

Пусть U — унипотентная подгруппа группы G. Тогда $N_G(U) = UH = B$ — подгруппа Бореля, где H — подгруппа Картана. Пусть сначала

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Согласно лемме 3 найдется простое число $r \in \pi(G)$ такое, что r не делит порядок ни одной собственной параболической подгруппы группы G. Рассмотрим подгруппу $R \in Syl_r(G)$. По условию можно считать, что существует подгруппа BR. Из леммы 2 следует, что $BR = G$. Таким образом, группа G является произведением двух разрешимых групп. Список простых неабелевых групп, являющихся произведением двух своих разрешимых подгрупп, приведен в [18]. Группами лиева типа в данном списке являются

$$L_2(q),\ q > 3; \quad L_3(q),\ q < 9; \quad U_3(8); \quad L_4(2) \cong A_8; \quad Sp_4(3) \cong U_4(2).$$

Случай $L_4(2) \cong A_8$ рассмотрен выше. Отметим, что $|G : B| = r^t$ для некоторого $t \geq 1$. Из [19] следует, что группа $U_3(8)$ не имеет подгрупп примарного индекса. Рассмотрим оставшиеся случаи.

$G \cong L_2(q)$, где $q > 3$. Все сведения о строении подгрупп группы $L_2(q)$ можно найти в [20, теорема II.8.27]. Далее будем ссылаться на эту теорему без дополнительных оговорок. Согласно [19] в этом случае $q+1 = r^t$. Пусть сначала $q = p^n$ — нечетное число. Тогда $q+1$ является степенью числа 2, силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок $q+1$ и совпадает со своим нормализатором. Ясно, что она не перестановочна ни с одной подгруппой, сопряженной с силовской p-подгруппой группы G, что противоречит условию теоремы. Пусть $q = 2^n$. Из леммы 6 следует, что $q+1$ либо простое число, либо равно 9. В обоих случаях максимальная подгруппа порядка $2(q+1)$, являющаяся нормализатором силовской r-подгруппы группы G, не перестановочна ни с одной силовской 2-подгруппой группы G. Снова приходим к противоречию с условием теоремы.

$G \cong L_3(q)$, где $q < 9$. Из [19] следует, что в этом случае q^2+q+1 — степень простого числа. Для $q = 2$ имеем $L_3(2) \cong L_2(7)$. Данный случай рассмотрен выше. Проанализируем оставшиеся случаи.

$G \cong L_3(3)$. Из [17, с. 13] следует, что нормализатор в G силовской 13-подгруппы изоморфен $13 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G, а значит, группа G не удовлетворяет условию теоремы.

$G \cong L_3(5)$. Из [17, с. 38] следует, что нормализатор в G силовской 31-подгруппы изоморфен $31 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G, снова приходим к противоречию.

$G \cong L_3(8)$. Из [17, с. 74] следует, что нормализатор в G силовской 73-подгруппы изоморфен $73 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G, а значит, G не удовлетворяет условию теоремы.

$G \cong Sp_4(3) \cong U_4(2)$. Пусть $T \in Syl_2(G)$. Из [17, с. 26] следует, что $N_G(T) = T : \langle a \rangle$, где $|a| = 3$, и подгруппа $N_G(T)$ не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Пусть сначала $G \cong L_6(2)$. В группе $L_6(2)$ подгруппа Картана H единична, поэтому силовская 2-подгруппа группы G, являющаяся унипотентной подгруппой, самонормализуема. По условию теоремы группа G обладает свойством $E_{\{2,r\}}$ для всякого $r \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Из [21] следует, что в этом случае группа G разрешима. Последнее невозможно. Если G изоморфна одной из групп $Sp_6(2)$ или $\Omega_8^+(2)$, то подгруппа Картана H также единична и данные случаи рассматриваются аналогично случаю $G \cong L_6(2)$. Случай $G \cong Sp_4(3) \cong U_4(2)$ был рассмотрен выше. Снова пришли к противоречию, которое окончательно устанавливает, что группа G не проста.

Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Рассмотрим фактор-группу G/N. Пусть P/N — ее силовская p-подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G/N)$. Тогда найдется такая подгруппа $P_1 \in Syl_p(G)$, что $P/N = P_1N/N$. Так как подгруппа P_1 пронормальна в G, по лемме 17.5 из [22] имеем

$$N_{G/N}(P/N) = N_{G/N}(P_1N/N) = N_G(P_1N)/N = N_G(P_1)N/N.$$

Отсюда ввиду леммы 1 нормализатор любой силовской подгруппы группы G/N является G/N-перестановочной подгруппой в G/N. Ввиду выбора группы G из $|G/N| < |G|$ имеем, что G/N — разрешимая группа. Кроме того, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Если N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$, то группа G разрешима, что противоречит ее выбору. Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Пусть

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t,$$

где $t \geq 1$ и $N_1, N_2, \dots, N_t$ — изоморфные простые группы.

Пусть $p \in \pi(N)$, $P \in Syl_p(G)$ и A — произвольная подгруппа в N. Ввиду условия теоремы для некоторого $x \in G$ существует подгруппа $F = A^x N_G(P)$. Тогда ввиду тождества Дедекинда имеем

$$F \cap N = A^x N_G(P) \cap N = A^x (N_G(P) \cap N).$$

Если $y \in N_G(P) \cap N$, то из $N \trianglelefteq G$ следует, что $y \in N_N(P \cap N)$. Поэтому

$$N_G(P) \cap N \subseteq N_N(P \cap N).$$

Из теоремы Силова следует, что $P \cap N \in Syl_p(N)$. Кроме того, подгруппа $P \cap N$ содержится в $N_G(P) \cap N$. Таким образом, подгруппа $F \cap N$ представима в виде $F \cap N = A^x L$, где

$$P \cap N \subseteq L = N_G(P) \cap N \subseteq N_N(P \cap N)$$

и $P \cap N \in Syl_p(N)$.

Предположим далее, что $A \subseteq N_1$. Так как группа G действует транзитивно на множестве $\Sigma = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, то $N_1^x = N_k$ и $A^x \subseteq N_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Ввиду тождества Дедекинда имеем

$$F \cap N_k = (F \cap N) \cap N_k = A^x (N_G(P) \cap N) \cap N_k = A^x (N_G(P) \cap N_k).$$

При этом $P \cap N_k \subseteq N_G(P) \cap N_k \subseteq N_{N_k}(P \cap N_k)$ и $P \cap N_k \in Syl(N_k)$. Отсюда следует, что

$$(A^x (N_G(P) \cap N_k))^{x^{-1}} = A(N_G(P^{x^{-1}}) \cap N_1) \subseteq N_1.$$

По теореме Силова $P^{x^{-1}} \cap N_1 = (P \cap N_1)^y$ для некоторого $y \in N_1$, а значит, $A^{y^{-1}}(N_G(P) \cap N_1)$ — подгруппа группы N_1, причем $N_G(P) \cap N_1 \subseteq N_{N_1}(P \cap N_1)$ и $P \cap N_1 \in Syl_p(N_1)$.

Итак, для любого простого $p \in \pi(N_1)$, каждой силовской p-подгруппы $\widetilde{P}$ простой неабелевой группы N_1 и любой ее подгруппы A найдется такой элемент $z \in N_1$, что подгруппа A^z перестановочна с некоторой подгруппой L из N_1, содержащей $\widetilde{P}$ и содержащейся в $N_{N_1}(\widetilde{P})$.

Таким образом, некоторая подгруппа $L \subset N_1$ такая, что $\widetilde{P} \subseteq L \subseteq N_{N_1}(\widetilde{P})$, является N_1-перестановочной с любой подгруппой $A \subseteq N_1$ (в частности, она является N_1-перестановочной с любой силовской и любой максимальной подгруппами из N_1). Анализ доказательства теоремы в случае, когда G — простая неабелева группа, показывает, что нормализатор $N_G(P)$ не перестановочен либо с некоторой силовской подгруппой группы G, либо с некоторой максимальной подгруппой группы G. Легко заметить, что если для $\widetilde{P} \in Syl(N_1)$ заменить $N_{N_1}(\widetilde{P})$ подгруппой L с условием $\widetilde{P} \subseteq L \subseteq N_{N_1}(\widetilde{P})$, то соответствующие противоречия получаются в точности так же.

3. Доказательство теоремы 2

Ввиду теоремы 1 группа G разрешима. Поэтому по лемме 7 нормализатор каждой силовской подгруппы из G является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Отсюда, очевидно, следует, что любая силовская подгруппа группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а значит, $G \in w\mathfrak{U}$.

Предположим, что группа G не является сверхразрешимой. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что G — минимальная несверхразрешимая группа. Так как $G \in w\mathfrak{U}$, ввиду леммы 8 G — трипримарная минимальная несверхразрешимая группа. Пусть $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где $p > q > r$, и пусть $P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$, $R \in Syl_r(G)$. Из теорем 9 и 10 работы [16] следует, что G — группа одного из двух следующих типов:

(1) $G = P : (QR)$, где R — циклическая подгруппа порядка r^{s+t} ($s \geq 1$, $t \geq 0$), нормализующая подгруппу Q; $Q/\Phi(Q)$ — неприводимый R-модуль над полем из q элементов с ядром D порядка r^t; P — неприводимый QR-модуль над полем из p элементов; q и r делят $p - 1$;

(2) $G = P : (QR)$, где R — циклическая подгруппа порядка 2^{s+t} ($s \geq 1$, $t \geq 0$), нормализующая подгруппу Q; $Q/\Phi(Q)$ — неприводимый R-модуль над полем из q элементов с ядром D порядка 2^t; P — экстраспециальная группа порядка p^3 экспоненты p; $P/\Phi(P)$ — неприводимый QR-модуль над полем из p элементов; q и 2^s делят $p - 1$.

Простая проверка показывает, что $\Phi(P) = 1$ в первом случае и $|\Phi(P)| = p$ во втором. Кроме того, $N_G(Q)\Phi(P)$ — максимальная подгруппа группы G, дополняющая главный фактор $P/\Phi(P)$ группы G, который ввиду леммы 9 не является циклической группой.

С другой стороны, ввиду условия теоремы для максимальной подгруппы A группы P найдется элемент $x \in G$ такой, что $A^x N_G(Q)$ — подгруппа группы G. Так как $A^x N_G(Q) \neq G$ и $\Phi(P) \subseteq A^x$, то

$$A^x N_G(Q) = A^x(N_G(Q)\Phi(P)).$$

Теперь из максимальности $N_G(Q)\Phi(P)$ в G следует, что $A^x \subseteq N_G(Q)\Phi(P)$, а значит, $A^x \subseteq \Phi(P)$. Отсюда P — циклическая группа. Пришли к противоречию, которое завершает доказательство теоремы 2.

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и советы, которые позволили значительно улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 431–460.
2. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
3. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* Конечные группы с наследственно G-перестановочными минимальными подгруппами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 102–110.
4. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О разрешимости и сверхразрешимости конечных групп // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 312–320.
5. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Pérez-Calabuig V., Tyutyanov V. N.* Finite groups with G-permutable Schmidt subgroups // Mediterranean J. Math. 2023. V. 20, N 3. Article 174. P. 1–12.
6. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Pérez-Calabuig V., Tyutyanov V. N.* Finite groups with hereditarily G-permutable Schmidt subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2024. V. 109, N 3. P. 522–528.

7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. *Seitz G. M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. V. 97, N 1. P. 27–56.
9. *Тютянов В. Н., Шеметков Л. А.* Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 52–55.
10. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Mem. Am. Math. Soc. 1990. V. 86, N 432. P. 1–151.
11. *Wiegold J., Williamson A. G.* The factorisation of the alternating and symmetric groups // Math. Z. 1980. V. 175, N . P. 171–179.
12. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3, N 1. P. 265–284.
13. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
14. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. V. 60. P. 409–434.
15. *Doerk K.* Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen // Math. Z. 1966. V. 91. P. 198–205.
16. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On minimal non-supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2007. V. 23, N 1. P. 127–142.
17. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
18. *Kazarin L. S.* Product of two solvable subgroups // Commun. Algebra. 1986. V. 14, N 6. P. 1001–1066.
19. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, N 2. P. 304–311.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
21. *Тютянов В. Н.* К гипотезе Холла // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 981–990.
22. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
23. *Гальт А. А., Тютянов В. Н.* О существовании G-перестановочных подгрупп в простых спорадических группах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 831–841.

Поступила в редакцию 4 января 2024 г.
После доработки 27 апреля 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Шеметкова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru