

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Я. А. РОЙТБЕРГ

**ТЕОРЕМА О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ,
НЕ ЯВЛЯЮЩИМИСЯ НОРМАЛЬНЫМИ**

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 IX 1969)

Теоремы о гомеоморфизмах для эллиптических граничных задач устанавливались в работах ⁽¹⁻¹¹⁾. Во всех этих работах предполагается, что граничные условия нормальны. Между тем хорошо известно, что нётеровость эллиптических задач имеет место без предположения о нормальности граничных выражений. Поэтому естественно возникает задача об установлении теорем о гомеоморфизмах без предположения о нормальности граничных условий. Эту задачу формулировали в беседах с автором Ю. М. Березанский и М. И. Вишик, она поставлена также Мадженесом в ⁽⁵⁾. Решению указанной задачи и посвящена данная работа, являющаяся продолжением работы ⁽¹²⁾, основные обозначения и результаты которой здесь используются. Отметим также работу ⁽¹³⁾, в которой теорема о гомеоморфизмах установлена (без предположения о нормальности граничных выражений) в пространствах, сопряженных к гёльдеровским.

1. В ограниченной области G с границей Γ рассматривается правильно эллиптическое дифференциальное выражение $L = L(x, D)$ порядка $2m$ с комплексными коэффициентами, а на Γ — система m вообще псевдодифференциальных по тангенциальным и дифференциальных по нормальным к Γ направлениям выражений $B_j(x, D)$ порядков $m_j \leq 2m - 1$, накрывающая L . Для простоты предполагается, что как поверхность Γ , так и все выражения бесконечно гладкие. Хорошо известно, что для каждого действительного $s \geq 0$ оператор

$$A_s: u \rightarrow (Lu, B_1 u|_{\Gamma}, \dots, B_m u|_{\Gamma}) \quad (u \in W_2^{2m+s}(G)) \quad (1)$$

является нётеровским

$$\text{из } W_2^{2m+s}(G) \text{ в } W_2^s(G) + \sum_{j=1}^m W_2^{2m+s-m_j-1/2}(\Gamma) \equiv K_s(G), \quad (2)$$

т. е. $\mathfrak{R} = \{u \in W_2^{2m+s}(G): A_s u = 0\}$ конечномерно (и не зависит от s), область значения $\mathfrak{R}(A_s)$ оператора A_s замкнута в $K_s(G)$ и имеет конечную коразмерность. Более того, существует не зависящее от $s \geq 0$ конечномерное пространство $\mathfrak{M}^+ \subset C^\infty(\bar{G}) + C^{\infty, m}(\Gamma)$ ($C^{\infty, r}(\Gamma) = C^\infty(\Gamma) + \dots + C^\infty(\Gamma)$) такое, что $F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m) \in K_s(G)$ входит в $\mathfrak{R}(A_s)$ в том и только том случае, когда

$$[F, V] \equiv (f, v) + \sum_{j=1}^m \langle \varphi_j, v_j \rangle = 0 \quad (V = (v, v_1, \dots, v_m) \in \mathfrak{M}^+) \quad (3)$$

$((\cdot, \cdot)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение соответственно в $L_2(G)$ и $L_2(\Gamma)$).

Как и в (6-10, 12, 14), обозначим через $\tilde{W}_2^l(G) = \tilde{W}_{2,2m}^l(G)$ (l — произвольное целое) пополнение множества $C^\infty(\bar{G})$ по норме

$$\| \| u \| \|_l = \left(\| u \|_{W_2^l(G)}^2 + \sum_{j=1}^{2m} \| D_v^{j-1} u \|_{W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

$(D_v = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v}, v = v(x) — \text{орт внутренней нормали к } \Gamma \text{ в точке } x; \text{ пространства } W_2^l(G) \text{ и } W_2^{-l}(G) (W_2^{l-1/2}(\Gamma) \text{ и } W_2^{-(l-1/2)}(\Gamma)) \text{ взаимно сопряжены относительно } (\cdot, \cdot) \langle \cdot, \cdot \rangle)).$ Если $l \geq 2m$, то нормы $\| \| u \| \|_l$ и $\| u \|_{W_2^l(G)}$ эквивалентны и $\tilde{W}_2^l(G) = W_2^l(G)$; при $l < 2m$ эти нормы не эквивалентны.

Так как норма (4) — это норма прямой суммы $W_2^l(G) + \sum_{j=1}^{2m} W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)$,

то по существу $\tilde{W}_2^l(G)$ состоит из элементов вида $u = (u_0, u_1, \dots, u_{2m})$, где $u_0 \in W_2^l(G)$, $u_j = D_v^{j-1} u_0|_\Gamma$, если $l - j \geq 0$; при $l - j < 0$ u_j — произвольный элемент пространства $W_2^{l-j+1/2}(\Gamma)$. Если t — нецелое, $l < t < l + 1$, то определим $W_2^l(G)$ с помощью комплексной интерполяции между пространствами $\tilde{W}_2^l(G)$ и $\tilde{W}_2^{l+1}(G)$. Для произвольного действительного t норма $\| u \|_{\tilde{W}_2^t(G)}$ эквивалентна норме $\| u \|_{W_2^t(G)} + \| Lu \|_{W_2^{t-2m}(G)}$ (14). Ниже $u|_G$ — первая компонента элемента $u \in \tilde{W}_2^t(G)$.

Для каждого действительного t замыкание по непрерывности A_t отображения $u \rightarrow (Lu, B_1 u|_\Gamma, \dots, B_m u|_\Gamma)$ ($u \in C^\infty(\bar{G})$) непрерывно действует из

$$\text{всего } \tilde{W}_2^{2m+t}(G) \text{ в } K_t(G) = W_2^t(G) + \sum_{j=1}^m W_2^{2m+t-m_j-1/2}(\Gamma).$$

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 1. Для того чтобы задача $A_t u = F \in K_t(G)$ имела решение $u \in \tilde{W}_2^{2m+t}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $F = (f, \Phi_1, \dots, \Phi_m)$ удовлетворял соотношениям (3). Сужение A_t оператора A_t на подпространство $\tilde{P} \tilde{W}_2^{2m+t}(G) = \{u \in \tilde{W}_2^{2m+t}(G) : (u|_G, \mathfrak{M}) = 0\}$ пространства $\tilde{W}_2^{2m+t}(G)$ осуществляет гомеоморфизм $\tilde{P} \tilde{W}_2^{2m+t}(G) \rightarrow \tilde{Q}^+ K_t(G)$, где $\tilde{Q}^+ K_t(G) = \{F \in K_t(G) : [F, \mathfrak{M}^+] = 0\}$ — подпространство $K_t(G)$.

2. Для доказательства теоремы 1 мы прежде всего с помощью выведенной в (12) формулы Грина более конкретно описываем множество $\mathfrak{M}^+$. Обозначив через $Bu = (B_1 u, \dots, B_m u)$, $Cu = (C_1 u, \dots, C_m u)$, $B'v = (B_1' v, \dots, B_m' v)$, $C'v = (C_1' v, \dots, C_m' v)$, $\zeta'' = (u''|_\Gamma, \dots, D_v^{2m-1} u''|_\Gamma)$, мы запишем формулу Грина (23) из (12) в виде

$$Lu, v \rangle + \langle Bu, C'v \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = \langle u, L^+ v \rangle + \langle Cu, B'v \rangle_{L_2^m(\Gamma)} + \langle \zeta'', Tv \rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} \quad (5)$$

$$(u, v \in W_2^{2m}(G)).$$

Пусть $\hat{r}$ и $\check{r}$ — операторы, ставящие в соответствие каждому $2m$ -мерному вектору $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{2m})$ соответственно векторы $\hat{r}\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ и $\check{r}\eta = (\eta_{m+1}, \dots, \eta_{2m})$. Представим пространство $\mathfrak{M}_\Gamma^+$ в виде $\mathfrak{M}_\Gamma^+ = \mathfrak{M}_\Gamma^{+1} \oplus \mathfrak{M}_\Gamma^{+2} \oplus \mathfrak{M}_\Gamma^{+3}$, где $\mathfrak{M}_\Gamma^{+1} = \{\eta \in \mathfrak{M}_\Gamma^+ : \check{r}\eta = 0\}$, $\mathfrak{M}_\Gamma^{+2} = \{\eta \in \mathfrak{M}_\Gamma^+ : \hat{r}\eta = 0\}$; если $\eta \neq 0$

входит в $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$, то как $\hat{r}\eta \neq 0$, так и $r\eta \neq 0$. Пусть $W_2^{2m+s}(\Gamma) = \{u \in W_2^{2m+s}(G) : Bu|_\Gamma = 0\}$ ($s \geq 0$), $W_2^{2m}(\Gamma)^+ = \{v \in W_2^{2m}(G) : (Lu, v) = (u, L^+v) \text{ (} u \in W_2^{2m}(\Gamma) \text{)}\}$.

Из формулы Грина следует, что

$$W_2^{2m}(\Gamma)^+ = \{v \in W_2^{2m}(G) : \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0, \quad B^+v|_\Gamma \in r\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}\}. \quad (6)$$

Положим также $W_2^{2m+s}(\Gamma)^+ = W_2^{2m}(\Gamma)^+ \cap W_2^{2m+s}(G)$ ($s \geq 0$).

Рассмотрим задачи с однородными граничными условиями

$$Lu = f \in W_2^s(G), \quad u \in W_2^{2m+s}(\Gamma) \quad (s \geq 0); \quad (7)$$

$$L^+v = g \in W_2^s(G), \quad v \in W_2^{2m+s}(\Gamma)^+ \quad (s \geq 0). \quad (8)$$

Лемма 1. *Пространство $\mathfrak{N}^+$ решений задачи (8) с $g = 0$ конечномерно и не зависит от $s \geq 0$. Для разрешимости задачи (7) необходимо и достаточно, чтобы $(f, \mathfrak{N}^+) = 0$, а для разрешимости задачи (8) необходимо и достаточно, чтобы $(g, \mathfrak{N}) = 0$.*

Рассмотрим теперь задачи с неоднородными граничными условиями:

$$Lu = f, \quad Bu|_\Gamma = \varphi \quad (\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)); \quad (9)$$

$$L^+v = g, \quad B^+v|_\Gamma = \psi \in r\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}, \quad \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (10)$$

$$(\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)).$$

Для любого действительного t построим по каждому вектору $\varphi \in \sum_{j=1}^m W_2^{2m+t-m_j-1/2}(\Gamma)$ вектор $\tilde{\varphi} \in r\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$ так, чтобы вектор $(\varphi, \tilde{\varphi})$ был ортогональным в $L_2^{2m}(\Gamma)$ к $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$. Ясно, что этими условиями $\tilde{\varphi}$ однозначно определяется по вектору φ ; если $e_1, \dots, e_q$ — базис в $\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$ такой, что $re_1, \dots, re_q$ образует ортонормированный относительно $L_2^m(\Gamma)$ базис в $r\mathfrak{N}_\Gamma^{+3}$, то

$$\tilde{\varphi} = - \sum_{j=1}^q \langle \varphi, \hat{r}e_j \rangle_{L_2^m(\Gamma)} re_j. \quad (11)$$

Теорема 2. *Для того чтобы задача (9) с $F = (f, \varphi) \in K_s(G)$ ($s \geq 0$) имела решение $u \in W_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle \varphi, \hat{r}\mathfrak{N}_\Gamma^{+1} \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0; \quad (12)$$

$$(f, v) + \langle \varphi, C^+v \rangle_{L_2^m(\Gamma)} - \langle \tilde{\varphi}, B_j^+v \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (v \in \mathfrak{N}^+).$$

Для того чтобы задача (10) с $(g, \psi) \in W_2^s(G) + \sum_{j=1}^m W_2^{2m+s-m_j-1/2}(\Gamma) \equiv K'_s(G)$ ($s \geq 0$) имела решение $v \in W_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \psi, r\mathfrak{N}_\Gamma^{+2} \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0, \quad (g, u) + \langle \psi, Cu \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (u \in \mathfrak{N}). \quad (13)$$

Необходимость этой теоремы следует из формулы Грина (5) и рассмотрений п. 2 работы (12). Достаточность доказывается с помощью сведения неоднородных задач к однородным и использования леммы 1. Отметим также, что условия (12) (с учетом (11)) конкретизируют условия (3) разрешимости задачи (9).

Рассмотрим также задачу

$$Lu(x) = f(x) \quad (x \in G), \quad Bu|_{\Gamma} = \varphi, \quad \langle Cu, r\mathfrak{M}_{\Gamma}^{+3} \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0. \quad (14)$$

Теорема 3. Для того чтобы задача (14) с $F = (f, \varphi) \in K_s(G)$ ($s \geq 0$) имела решение $u \in W_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \varphi, r\mathfrak{M}_{\Gamma}^{+} \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0, \quad (f, v) + \langle \varphi, C'v \rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \quad (v \in \mathfrak{M}^+). \quad (15)$$

Из теорем 2, 3 и формулы Грина (5) с помощью метода М. И. Вишика — С. Л. Соболева ⁽¹⁵⁾ выводится, что для того чтобы задача (14) с $F \in K_s(G)$ ($s \leq 0$) имела решение $u \in \tilde{W}_2^{(2m+s)}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15). Отсюда уже легко следует, что для того чтобы задача (9) с $F \in K_s(G)$ ($s \leq 0$) имела решение $u \in \tilde{W}_2^{2m+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (12), т. е. следует теорема 1.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

Черниговский государственный педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
1 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Schechter, Ann. Math., 72, № 3 (1960). ² M. Schechter, Am. J. Math., 85, № 1 (1963); Math. Scand., 13, № 1 (1963). ³ J. L. Lions, E. Magenes, Ann. de la Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 15, № 1—2 (1961); 16, № 1 (1962); J. d'Analyse Math., 11, 165 (1963). ⁴ Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, ДАН, 148, № 4 (1963). ⁵ E. Magenes, Conf. tenuta al VII Congresso dell'UMI, Genova, 30 IX — 5 X 1963; УМН, 21, № 2 (1966). ⁶ Я. А. Ройтберг, ДАН, 157, № 4 (1964). ⁷ Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 17, № 5 (1965). ⁸ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ⁹ Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 19, № 5 (1967). ¹⁰ Я. А. Ройтберг, ДАН, 180, № 3 (1968). ¹¹ J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, 1, Paris, 1968. ¹² Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 21, № 3 (1969). ¹³ Ю. П. Красовский, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 1 (1969). ¹⁴ Я. А. Ройтберг, ДАН, 188, № 1 (1969). ¹⁵ М. И. Вишик, С. Л. Соболев, ДАН, 111, № 3 (1956).