



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, Об одном критерии σ -субнормальности подгруппы в конечной $3'$ -группе, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 8, 36–43

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-36-43

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

29 января 2025 г., 14:46:04



С.Ф. КАМОРНИКОВ, В.Н. ТЮТЯНОВ

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ σ -СУБНОРМАЛЬНОСТИ ПОДГРУППЫ В КОНЕЧНОЙ $3'$ -ГРУППЕ

Аннотация. Для любого разбиения σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел доказывается, что если подгруппа H конечной $3'$ -группы G σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$, то подгруппа H является σ -субнормальной в G .

Ключевые слова: конечная группа, σ -субнормальная подгруппа, субнормальная подгруппа, группа Судзуки.

УДК: 512.542

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-8-36-43

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известен [1] следующий критерий субнормальности Виландта: подгруппа H конечной группы G является субнормальной тогда и только тогда, когда она субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$. Отмеченный результат инициировал соответствующий вопрос для σ -субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А.Н. Скибой в [2] под номером 19.84 (см. также вопрос 7.5 из [3]).

Пусть для каждого элемента $x \in G$ подгруппа H группы G σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$. Верно ли, что подгруппа H σ -субнормальна в G ?

Положительный ответ на этот вопрос в случае, когда G — конечная $3'$ -группа, дается в теореме данной работы.

Концепция σ -субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы из [4], предложена А.Н. Скибой в работе [5]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G . Далее всегда σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i ($i \in I$), т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Следуя [5], будем говорить, что группа G является σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется σ -субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

Поступила в редакцию 23.09.2019, после доработки 23.09.2019. Принята к публикации 29.06.2020.

Благодарности. Работа С.Ф. Каморникова выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГР №20191056).

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Подгруппа H конечной $3'$ -группы G σ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда H σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Ключом к доказательству теоремы являются предложение, устанавливающее строение минимального контрпримера к проблеме 19.84, а также работа М. Судзуки [6] о простых неабелевых $3'$ -группах.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [7]. Что касается терминологии теории σ -субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работе [5].

Группа G называется σ -*нильпотентной*, если G является прямым произведением некоторых σ -примарных групп, т. е. группа G представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i -подгрупп для некоторых $i \in I$.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной формацией Фиттинга. Отсюда, в частности, следует, что в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой σ -нильпотентна. Эта подгруппа обозначается $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и называется σ -*нильпотентным корадикалом* (или $\mathfrak{N}_\sigma$ -*корадикалом*) группы G . Кроме того, в любой группе G существует наибольшая нормальная σ -нильпотентная подгруппа. Эта подгруппа обозначается $G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ и называется σ -*нильпотентным радикалом* (или $\mathfrak{N}_\sigma$ -*радикалом*) группы G .

Для класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -*субнормальной* в смысле Кегеля (или просто K - $\mathfrak{F}$ -*субнормальной*), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (см. [8]).

Следующая лемма, доказательство которой осуществляется простой проверкой, устанавливает связь между σ -субнормальными и K - $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами группы G .

Лемма 1. Подгруппа H σ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда она K - $\mathfrak{N}_\sigma$ -субнормальна в G .

Основные свойства σ -субнормальных подгрупп приведем в виде лемм. Доказательство их в терминах K - $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп можно найти в ([7], леммы 6.1.6, 6.1.7, 6.1.9; [9], лемма 2.5).

Лемма 2. Пусть H и N — подгруппы группы G , причем подгруппа N нормальна в G . Тогда

- 1) если H σ -субнормальна в G , то подгруппа HN/N σ -субнормальна в G/N ;
- 2) если $N \subseteq H$, то подгруппа H σ -субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N σ -субнормальна в G/N .

Лемма 3. Пусть H и K — подгруппы группы G , причем подгруппа H σ -субнормальна в G . Тогда

- 1) если $K \subseteq H$ и подгруппа K σ -субнормальна в H , то K σ -субнормальна в G ;
- 2) если $H \subseteq K$, то H σ -субнормальна в K .

Лемма 4. Если подгруппа H группы G σ -субнормальна в G , то $\mathfrak{N}_\sigma$ -корадикал $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормален в G .

Лемма 5. Если подгруппа H группы G σ -субнормальна в G и $H \in \mathfrak{N}_\sigma$, то H содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$ -радикале группы G .

Будем говорить, что пара (G, H) является контрпримером к проблеме 19.84, если для любого $x \in G$ подгруппа H σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$, но H не является σ -субнормальной в G . Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть минимальным контрпримером к проблеме 19.84.

Предложение. Если (G, H) — минимальный контрпример к проблеме 19.84, то справедливы следующие утверждения:

- 1) H — группа простого порядка p ;
- 2) либо G — простая неабелева группа, либо является почти простой с цоклем N и имеет вид $G = N \rtimes H$.

Доказательство. Предположим, что группа G не является простой. Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Ввиду леммы 2 подгруппа HN/N σ -субнормальна в

$$\langle HN/N, H^x N/N \rangle = \langle H, H^x \rangle N/N$$

для любого $x \in G$. Так как $|G/N| + |HN/N| < |G| + |H|$, то из минимальности контрпримера следует, что подгруппа HN/N σ -субнормальна в G/N , а значит, подгруппа HN σ -субнормальна в G . Если $|HN| < |G|$, то в силу выбора группы G подгруппа H σ -субнормальна в HN . По лемме 3 подгруппа H σ -субнормальна в G . Пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы H .

Поэтому далее полагаем, что $G = HN$ и $\text{Core}_G(H) = 1$.

Ввиду леммы 4 для любого элемента $x \in G$ подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$. Но тогда подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $\langle H^{\mathfrak{N}_\sigma}, (H^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \rangle$ для любого $x \in G$. Отсюда ввиду теоремы 3 из [1] подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является субнормальной в группе G .

Пусть M — максимальная подгруппа группы G , содержащая H . Так как $|M| + |H| < |G| + |H|$, то из минимальности контрпримера следует, что подгруппа H σ -субнормальна в M . Согласно лемме 7.3.16 из [10] $H^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq \text{Core}_G(M)$. Если $H^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$, то из минимальности контрпримера следует, что подгруппа $H\text{Core}_G(M)$ σ -субнормальна в G . Так как $H\text{Core}_G(M) \subseteq M$, то H σ -субнормальна в $H\text{Core}_G(M)$. Ввиду леммы 3 подгруппа H является σ -субнормальной в G . Снова пришли к противоречию. Следовательно, $H^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$ и $H \in \mathfrak{N}_\sigma$, где $H = \langle h \rangle$.

Предположим, что H не является примарной циклической группой. Тогда в H найдутся две различные максимальные подгруппы H_1 и H_2 . Так как подгруппа H принадлежит формации $\mathfrak{N}_\sigma$, то подгруппы H_1 и H_2 σ -субнормальны в H . Следовательно, в силу леммы 3 для любого $x \in G$ подгруппа H_1 σ -субнормальна в $\langle H_1, (H_1)^x \rangle$, а подгруппа H_2 σ -субнормальна в $\langle H_2, (H_2)^x \rangle$. Но тогда из минимальности контрпримера вытекает, что подгруппы H_1 и H_2 σ -субнормальны в G . Ввиду теоремы 1.1 из [9] формация $\mathfrak{N}_\sigma$ обладает решеточным свойством. Поэтому подгруппа $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ σ -субнормальна в G . Пришли к противоречию с условием.

Следовательно, H — примарная циклическая группа. Не нарушая общности рассуждений, будем считать $|H| = p^n$, где $p \in \sigma_1$.

Предположим, что $n > 1$. Пусть D — подгруппа порядка p^{n-1} из H . Очевидно, подгруппа D является σ -субнормальной в H . Отсюда ввиду леммы 3 она будет σ -субнормальной в подгруппе $\langle D, D^x \rangle$ для любого $x \in G$. Так как $|G| + |D| < |G| + |H|$, то из минимальности контрпримера вытекает, что подгруппа D σ -субнормальна в G . Но тогда по лемме 5 D содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$ -радикале группы G . А так как D является σ_1 -группой, то $D \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. Если $D \neq 1$, то согласно примитивности группы G имеем $N \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. А значит, группа $G = HN$ является σ_1 -группой и подгруппа H σ -субнормальна в G , что противоречит условию.

Таким образом, $D = 1$, т. е. H является группой простого порядка p . Тогда либо G — простая неабелева группа, либо $H \cap N = 1$ и $G = N \rtimes H$, где $H = \langle h \rangle$.

Предположим, что подгруппа N не является простой. Тогда она представляется в виде $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где $t > 1$ и $N_1, N_2, \dots, N_t$ — изоморфные простые группы. При этом N_1 не является σ_1 -группой, так как в противном случае H является σ -субнормальной в G . Как следует из ([7], 1.1.40) $t = |G : N_G(N_1)| = |G : N| = |H| = p$. Подгруппа H сопряжением действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$. Так как $|H| = p$ — простое число, то, очевидно, $H = \langle h \rangle$ для всякого неединичного элемента $h \in H$. Поэтому для каждого N_i из множества $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ имеем $N_i^h \neq N_i$. Таким образом, H действует на множестве $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$ регулярно. Поэтому если Q — силовская q -подгруппа из N_1 для некоторого простого числа q , не принадлежащего σ_1 , то $R = Q \times Q^h \times \dots \times Q^{h^{p-1}}$ — силовская q -подгруппа прямого произведения $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_p$. При этом подгруппа H нормализует R . Так как $|HR| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H σ -субнормальна в HR . Тогда в силу леммы 5 H содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$ -радикале подгруппы HR . Отсюда, в частности, следует $H \subseteq O_{\sigma_1}(HR)$. Так как H — силовская p -подгруппа группы HR и число q не принадлежит σ_1 , то $H = O_p(HR)$. Поскольку H нормализует R , то $HR = H \times R$. Пришли к противоречию с тем, что подгруппа H действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \dots, N_p\}$. Следовательно, $t = 1$ и подгруппа N является простой. $\square$

Предложение имеет самостоятельное значение. Из строения группы G в минимальном контрпримере, в частности, вытекают следующие результаты.

Следствие 1. Пусть G — разрешимая группа и σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ -субнормальной, когда H σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Напомним, что группа G называется σ -разрешимой, если каждый ее главный фактор является σ -примарной группой.

Следствие 2. Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и G — σ -разрешимая группа. Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ -субнормальной, когда H σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Всю информацию о строении и свойствах групп Судзуки можно найти в [6]. В ряде случаев мы не будем делать ссылок на эту работу.

Кроме того, при доказательстве теоремы мы будем опираться на лемму 5 и теорему А из [11], которые приведем в виде следующих лемм.

Лемма 6. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_k$ — представители всех сопряженных классов максимальных подгрупп группы G , содержащих элемент h . Если

$$|h^G|^2 > \sum_i |h^G \cap H_i|^2 |G : H_i|,$$

то существует элемент $x \in G$ такой, что $\langle h, h^x \rangle = G$. В частности, если

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} > \sum_i |h^G \cap H_i|,$$

то $\langle h, h^x \rangle = G$ для некоторого $x \in G$.

Лемма 7. Пусть $h \in G$ является элементом простого порядка $p \geq 5$. Тогда $h \in S(G)$ в том и только том случае, когда подгруппа $\langle h, h^x \rangle$ разрешима для всех $x \in G$.

Через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Если подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G , то ввиду леммы 3 она будет σ -субнормальной в $\langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Докажем обратное. Пусть (G, H) — минимальный контрпример к проблеме 19.84. Тогда ввиду предложения $H = \langle h \rangle$ — группа простого порядка p . Кроме того, либо G — простая неабелева группа, либо $G = N \rtimes H$, где N — простая неабелева группа. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. G — простая неабелева группа.

Поскольку G — 3'-группа, то $G \simeq Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $2n+1 \geq 3$. Пусть $2n+1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $2n+1$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — нечетные простые числа, причем $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Из [6] следует, что любая максимальная подгруппа группы G сопряжена с одной из следующих максимальных подгрупп:

- (1) группа Фробениуса H_1 порядка $q^2(q-1)$;
- (2) группы Фробениуса H_2 и H_3 порядков $4(q \pm \sqrt{2q} + 1)$ соответственно;
- (3) диэдральная группа H_4 порядка $2(q-1)$;
- (4) группы Судзуки $Sz(q^{1/p_i})$, где $i = 1, 2, \dots, k$.

Отметим, что неразрешимые подгруппы в G — это в точности простые группы Судзуки. Из [6] следует, что G имеет три тора порядков $q-1$, $q-\sqrt{2q}+1$, $q+\sqrt{2q}+1$ и эти числа являются попарно взаимно простыми. Кроме того, $\pi(G) = \{2\} \cup \pi(q-1) \cup \pi(q-\sqrt{2q}+1) \cup \pi(q+\sqrt{2q}+1)$.

1.1. Пусть $p=2$ и h — инволюция группы G . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $2 \in \sigma_1$. При этом G не является σ_1 -группой, так как в противном случае подгруппа $H = \langle h \rangle$ является σ -субнормальной в G . Поэтому найдется нечетное простое число $r \in \pi(G) \cap \sigma_2$. Тогда r принадлежит одному из трех попарно не пересекающихся множеств $\pi(q-1)$, $\pi(q-\sqrt{2q}+1)$, $\pi(q+\sqrt{2q}+1)$. Предположим, что $r \in \pi(q-1)$. В группе G имеется диэдральная подгруппа порядка $2(p-1)$. Так как все инволюции в G сопряжены, то можно считать, что h содержится в одной из таких подгрупп. Отсюда следует, что имеется группа Фробениуса $\langle x \rangle \rtimes \langle h \rangle$, где $|x| = r^t$. Значит, порождение $L = \langle h, h^x \rangle = \langle hh^x \rangle \rtimes \langle h \rangle = \{2, r\}$ -группа Фробениуса. По условию теоремы подгруппа $\langle h \rangle$ является σ -субнормальной в L , а потому группа $L/Core_L(\langle h \rangle) \simeq L$ является σ -примарной, что невозможно.

Аналогично приходим к противоречию: если r содержится в $\pi(q-\sqrt{2q}+1)$ или в $\pi(q+\sqrt{2q}+1)$. В этих случаях достаточно рассмотреть подгруппы Фробениуса порядков $2(q-\sqrt{2q}+1)$ и $2(q+\sqrt{2q}+1)$ соответственно.

1.2. Пусть p делит $q-1$ и h — элемент порядка p . Тогда h содержится в максимальной подгруппе, сопряженной с одной из максимальных подгрупп H_1 , H_4 и подгрупп $Sz(q^{1/p_i})$ п. (4).

Учитывая, что число различных элементов, сопряженных с элементом h , в некоторой подгруппе равно индексу централизатора элемента h в этой подгруппе, отсюда имеем

$$\sum_i |h^G \cap H_i| \leq q^2 + 2 + |Sz(q^{1/p_1})| + \dots + |Sz(q^{1/p_k})|.$$

Так как

$$|Sz(q^{1/p_i})| = q^{2/p_i}(q^{2/p_i} + 1)(q^{1/p_i} - 1) = q^{5/p_i} - q^{4/p_i} + q^{3/p_i} - q^{2/p_i} \leq q^{5/p_i} \leq q^{5/3},$$

то

$$\sum_i |h^G \cap H_i| \leq q^2 + 2 + kq^{5/3} \leq q^2 + 2 + (2n + 1)q^{5/3}.$$

С другой стороны,

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} \geq \frac{q^2(q^2 + 1)(q - 1)}{(q - 1)^2} = q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q - 1} > q^3 + q^2 + 2q + 2.$$

Так как неравенство $q^3 + 2q > (2n + 1)q^{5/3}$ справедливо для любого натурального n , то

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} > \sum_i |h^G \cap H_i|.$$

Тогда ввиду леммы 6 найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle h, h^x \rangle = G$. Пришли к противоречию с тем, что G — минимальный контрпример.

1.3. Пусть p делит $q + \sqrt{2q} + 1$ и h — элемент порядка p . Тогда h содержится в максимальной подгруппе, сопряженной с одной из максимальных подгрупп H_2 и подгрупп $Sz(q^{1/p_i})$ п. (4). Поэтому

$$\sum_i |h^G \cap H_i| \leq 4 + |Sz(q^{1/p_1})| + \dots + |Sz(q^{1/p_k})| \leq 4 + (2n + 1)q^{5/3}$$

и

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} \geq \frac{q^2(q^2 + 1)(q - 1)}{(q + \sqrt{2q} + 1)^2} \geq q^3 - 3q^2.$$

Следовательно, для любого натурального n выполняется неравенство

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} > \sum_i |h^G \cap H_i|.$$

Поэтому снова ввиду леммы 6 приходим к противоречию с выбором группы G .

1.4. p делит $q - \sqrt{2q} + 1$. Рассматривается аналогично 1.3.

Случай 2. $G = N \rtimes H$, где N — простая неабелева группа, $H = \langle h \rangle$ — группа простого порядка p .

Так как G — $3'$ -группа, то $N \simeq Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1}$. Внешними автоморфизмами $Sz(2^{2n+1})$ являются полевые автоморфизмы. При этом группа внешних автоморфизмов группы $Sz(2^{2n+1})$ является циклической и имеет порядок $2n + 1$. Так как $2n + 1$ — нечетное число и G — $3'$ -группа, то $p \geq 5$. Поскольку p делит $2n + 1 = 3^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ($\alpha \geq 0$, $\alpha_i \geq 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$), то $p = p_s \geq 5$ для некоторого фиксированного $s \in \{1, 2, \dots, k\}$.

2.1. Если $2n + 1 < 15$, то из $(|G|, 3) = 1$ следует $|H| = |h| \in \{5, 7, 11, 13\}$. Тогда все собственные подгруппы группы G , содержащие h , являются разрешимыми. Отсюда и из $S(G) = 1$ ввиду леммы 7 найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle h, h^x \rangle = G$. Противоречие.

2.2. $2n + 1 \geq 15$. Отметим, что согласно (9.1) из [12] $C_N(H) = Sz(2^{(2n+1)/p_s})$. Тогда для любого p_s имеем

$$\begin{aligned} \frac{|G|}{|C_G(h)|^2} &\geq \frac{p_s q^2 (q^2 + 1)(q - 1)}{(p_s q^{2/p_s} (q^{2/p_s} + 1)(q^{1/p_s} - 1))^2} \geq \frac{q^{2-6/p_s} (q^2 + 1)(q - 1)}{p_s (q^{2/p_s} + 1)^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{p_s} \frac{q^{4-6/p_s} (q - 1)}{(q^{2/p_s} + 1)^2} = \frac{1}{p_s} \left(q^{4-10/p_s} (q - 1) - q^{4-10/p_s} \frac{(2q^{2/p_s} + 1)(q - 1)}{(q^{2/p_s} + 1)^2} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{p_s} \left(q^{4-10/p_s} (q - 1) - q^{4-10/p_s} \frac{2(q^{2/p_s} + 1)(q - 1)}{(q^{2/p_s} + 1)^2} \right) \geq \frac{1}{p_s} (q^{5-10/p_s} - 2q^{5-12/p_s} - q^{4-10/p_s}). \end{aligned}$$

Кроме того, для всех $n \geq 7$

$$\begin{aligned} \sum_i |h^G \cap H_i| &\leq 2(q - 1) + 4(q - \sqrt{2q} + 1) + 4(q + \sqrt{2q} + 1) + \frac{q^2(q - 1)}{q^{2/p_s}} + \\ &+ |Sz(q^{1/3})| + |Sz(q^{1/p_1})| + \dots + |Sz(q^{1/p_{s-1}})| + |Sz(q^{1/p_s})| + |Sz(q^{1/p_{s+1}})| + \dots + |Sz(q^{1/p_k})| \leq \\ &\leq 6 + 10q + q^{2-2/p_s} (q - 1) + q^{2/3} (q^{2/3} + 1)(q^{1/3} - 1) + q^{2/p_1} (q^{2/p_1} + 1)(q^{1/p_1} - 1) + \dots + \\ &+ q^{2/p_{s-1}} (q^{2/p_{s-1}} + 1)(q^{1/p_{s-1}} - 1) + 1 + q^{2/p_{s+1}} (q^{2/p_{s+1}} + 1)(q^{1/p_{s+1}} - 1) + \dots + q^{2/p_k} (q^{2/p_k} + 1)(q^{1/p_k} - 1) \leq \\ &\leq 7 + 10q + q^{3-2/p_s} + q^{5/3} + (k - 1)q^{5/p_1} \leq 7 + (2n + 10)q + q^{5/3} + q^{3-2/p_s} \leq 2q^{3-2/p_s}. \end{aligned}$$

Простая проверка показывает, что для всех $n \geq 7$ справедливо неравенство

$$2q^{3-2/p_s} < \frac{1}{p_s} (q^{5-10/p_s} - 2q^{5-12/p_s} - q^{4-10/p_s}).$$

Следовательно,

$$\frac{|G|}{|C_G(h)|^2} > \sum_i |h^G \cap H_i|.$$

Тогда ввиду леммы 6 найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle h, h^x \rangle = G$. Пришли к противоречию с тем, что G — минимальный контрпример. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. И пусть каждый композиционный фактор конечной группы G либо σ -разрешим, либо является группой Судзуки.

Подгруппа H группы G тогда и только тогда является σ -субнормальной, когда H σ -субнормальна в $\langle H, H^x \rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и советы, которые позволили значительно улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wielandt H. *Kriterien für Subnormalität in endlichen Gruppen*, Math. Z. **138** (3), 199–203 (1974).
- [2] *The Kurovka notebook. Unsolved problems in group theory* (Sobolev Inst. Math., Sib. Branch Russian Acad. of Sci., Novosibirsk, 2018).
- [3] Skiba A.N. *On some results in the theory of finite partially soluble groups*, Commun. Math. Stat. **4** (3), 281–309 (2016).
- [4] Wielandt H. *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, Math. Z. **45**, 209–244 (1939).
- [5] Skiba A.N. *On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups*, J. Algebra **436**, 1–16 (2015).
- [6] Suzuki M. *On a class double transitive groups*, Ann. Math. **75** (1), 105–145 (1962).
- [7] Ballester-Bolínches A., Ezquerro L.M. *Classes of finite groups* (Springer, New York, 2006).

- [8] Kegel O.H. *Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten*, Arch. Math. **30** (3), 225–228 (1978).
- [9] Kamornikov S.F. *Permutability of subgroups and $\mathfrak{F}$ -subnormality*, Sib. Math. J. **37** (5), 936–949 (1996).
- [10] Lennox J.C., Stonehewer S.E. *Subnormal subgroups of groups* (Clarendon Press, Oxford, 1987).
- [11] Guest S. *A solvable version of the Baer-Suzuki theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **362**, 5909–5949 (2010).
- [12] Gorenstein D., Lyons R. *The local structure of the finite groups of characteristic 2 type*, Memoirs AMS **42** (276), 1–731 (1983).

Сергей Федорович Каморников

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Беларусь,

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Валентин Николаевич Тютянов

Гомельский филиал Международного университета <МИТСО>,
пр. Октября, д. 46 а, г. Гомель, 246029, Беларусь,

e-mail: vtutanov@gmail.com

S.F. Kamornikov and V.N. Tyutyanyan

A criterion for the σ -subnormality of a subgroup in a finite $3'$ -group

Abstract. For a partition σ of the set $\mathbb{P}$ of all primes, it is solved, that if a subgroup H of a finite $3'$ -group G is σ -subnormal in $\langle H, H^x \rangle$ for any $x \in G$, then H is σ -subnormal in G .

Keywords: finite group, σ -subnormal subgroup, subnormal subgroup, Suzuki group.

Sergey Fedorovich Kamornikov

Francisk Skorina Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

Valentin Nikolaevich Tyutyanyan

Gomel Branch of the International University <MITSO>,
46 a October Ave., Gomel, 246029 Republic of Belarus,

e-mail: vtutanov@gmail.com