ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 3 2020

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ СУБНОРМАЛЬНОСТИ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ: РЕДУКЦИЯ К ПРОСТЕЙШИМ БИНАРНЫМ РАЗБИЕНИЯМ

Ф. Сунь, С. Йи, С. Ф. Каморников

В статье развивается критерий Виландта о субнормальности подгруппы в конечной группе. Для множества $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и разбиения $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \{\pi\}'\}$ доказано, что подгруппа H σ-субнормальна в конечной группе G тогда и только тогда, когда она $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. В частности, подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p она $\{\{p\}, \{p\}'\}$-субнормальна в $\langle H, H^x\rangle$ для каждого элемента $x \in G$.

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, σ-субнормальная подгруппа, простейшее бинарное разбиение.

F. Sun, X. Yi, S. F. Kamornikov. Criterion of subnormality in a finite group: Reduction to elementary binary partitions.

Wielandt's criterion for the subnormality of a subgroup in a finite group is developed. For a set $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ and a partition $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \{\pi\}'\}$, it is proved that a subgroup H is σ-subnormal in a finite group G if and only if it is $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-subnormal in G for every $i = 1, 2, \ldots, n$. In particular, H is subnormal in G if and only if it is $\{\{p\}, \{p\}'\}$-subnormal in $\langle H, H^x\rangle$ for every prime p and any element $x \in G$.

Keywords: finite group, subnormal subgroup, σ-subnormal subgroup, elementary binary partition.

MSC: 20D25, 20D35

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-3-211-218

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

Хорошо известен следующий критерий субнормальности Виландта [1]: *подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она субнормальна в $\langle H, H^x\rangle$ для любого элемента $x \in G$.*

Признак субнормальности, ослабляющий требование субнормальности подгруппы H в подгруппе $\langle H, H^x\rangle$, приводится в настоящей работе.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Если $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества π простых чисел, то разбиение σ будем называть *бинарным*, а если, кроме того, $\pi = \{p\}$, где p — некоторое простое число, то будем говорить, что $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$ — *простейшее бинарное разбиение.*

В работе предлагается подход, который позволяет для ряда специальных разбиений редуцировать решение некоторых задач, связанных с исследованием свойств σ-субнормальных подгрупп, к случаю простейших бинарных разбиений.

В теории конечных групп концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А. Н. Скибой в статье [2]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Группа G называется *σ-примарной*, если она является σ_i-группой для некоторого $i \in I$. Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_k = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ либо подгруппа H_{i-1} является нормальной в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ — σ-примарная группа. В случае простейшего бинарного разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}^{'}\}$ подгруппа H группы G — σ-субнормальна, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_k = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ либо подгруппа H_{i-1} является нормальной в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ — p-группа, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ — $p^{'}$-группа.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального разбиения* $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$. Отметим еще, что $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальная подгруппа не всегда является субнормальной в G (например, любая подгруппа $p^{'}$-группы G является $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальной в G).

Главная цель данной работы — доказательство теорем 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — некоторое множество простых чисел. Если $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \{\pi\}^{'}\}$, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда она $\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, получаем

Следствие 1. *Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальна в G для любого простого числа p.*

Соединяя следствие 1 с критерием Виландта из [1], имеем

Следствие 2. *Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p она $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальна в $\langle H, H^x\rangle$ для каждого элемента $x \in G$.*

Следствие 3. *Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p она $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для каждого элемента $x \in G$.*

Отметим, что следствия 2 и 3 вытекают также из работы Кляйдмана [3], который, отвечая на вопрос Кегеля [4] и Виландта [5], доказал, что подгруппа H группы G является субнормальной в G, если для любого простого числа p она является p-субнормальной в G, т. е. $H \cap P$ — силовская p-подгруппа из H для любой силовской p-подгруппы P группы G. Условие $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальности подгруппы H в группе G более сильное по сравнению с условием p-субнормальности. Как показал А. Н. Скиба в [2], любая $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальная подгруппа группы G является p-субнормальной. Простые примеры показывают, что обратное утверждение не верно.

Отмеченный выше критерий Виландта из [1] инициировал следующий вопрос, поставленный А. Н. Скибой в [2] под номером 4.10:

Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G, если она σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$.

Положительный ответ на данный вопрос для частных разбиений σ, опирающихся на простейшие бинарные разбиения, сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — некоторое множество простых чисел, содержащее число 2. Если $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \{\pi\}^{'}\}$, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого $x \in G$.*

1. Основные определения и предварительные результаты

Основные свойства σ-субнормальных подгрупп, которые многократно используются в доказательствах, приведем в виде лемм. Доказательство первых двух из них осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. *Пусть H и N — подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда*:

1) *если подгруппа H является σ-субнормальной в G, то подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N*;

2) *если $N \subseteq H$, то подгруппа H σ-субнормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N σ-субнормальна в G/N.*

Лемма 2. *Пусть H и K — подгруппы группы G, причем подгруппа H σ-субнормальна в G. Тогда*:

1) *если $K \subseteq H$ и подгруппа K σ-субнормальна в H, то K σ-субнормальна в G*;

2) *подгруппа $K \cap H$ σ-субнормальна в K*;

3) *если $H \subseteq K$, то H σ-субнормальна в K.*

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G).

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Следуя [2], будем говорить, что группа G *σ-нильпотентна*, если она прямое произведение некоторых σ-примарных групп. В случае, когда $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, группа G является σ-нильпотентной тогда и только тогда, когда она *p-разложима*, т. е. представима в виде $G = G_p \times G_{p'}$. Как отмечено в [2], класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп — наследственная формация Фиттинга. Отсюда, в частности, получаем, что в любой группе G существует *σ-нильпотентный корадикал* — наименьшая нормальная подгруппа, факторгруппа, по которой σ-нильпотентна. Кроме того, в любой группе G существует наибольшая нормальная σ-нильпотентная подгруппа. Эта подгруппа обозначается через $F_\sigma(G)$ и называется *σ-нильпотентным радикалом* группы G. Если $\sigma = \{\{p\}, \{p\}'\}$, то, очевидно, $F_\sigma(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$.

При доказательстве теорем нам понадобится также следующая информация о свойствах σ-субнормальных подгрупп группы G.

Лемма 3 [6, лемма 1.3]. *Если подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G, то $\mathfrak{N}_\sigma$-корадикал подгруппы H субнормален в G.*

Лемма 4 [2, лемма 2.6 (п. 11)]. *Если подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G и $H \in \mathfrak{N}_\sigma$, то H содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$-радикале группы G.*

Будем говорить, что пара (G, H) является *контрпримером к теореме* 2, если для любого $x \in G$ подгруппа H σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$, но H не σ-субнормальна в G. Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к теореме* 2.

Лемма 5. *Если* (G, H) — *минимальный контрпример к теореме* 2, *то справедливы следующие утверждения*:

1) H — *группа простого порядка* p;

2) *либо* G — *простая неабелева группа, либо она является почти простой с цоколем* N *и имеет вид* $G = N \rtimes H$.

Доказательство. Предположим, что группа G не является простой. Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Согласно лемме 1 подгруппа HN/N σ-субнормальна в

$$\langle HN/N, xN\rangle = \langle H, x\rangle N/N$$

для любого $x \in G$. Так как $|G/N|+|HN/N| < |G|+|H|$, то из минимальности контрпримера выводим, что подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N, а значит, подгруппа HN σ-субнормальна в G. Если $|HN| < |G|$, то с учетом выбора группы G подгруппа H σ-субнормальна в HN. Теперь по лемме 2 подгруппа H σ-субнормальна в G. Пришли к противоречию с выбором группы G и ее подгруппы H.

Поэтому полагаем далее, что $G = HN$ и $Core_G(H) = 1$.

Ввиду леммы 3 для любого элемента $x \in G$ подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $\langle H, x\rangle$. Но тогда подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в $\langle H^{\mathfrak{N}_\sigma}, x\rangle$ для любого $x \in G$. Отсюда согласно теореме 3 из [1] подгруппа $H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ является субнормальной в группе G.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Так как $|M| + |H| < |G| + |H|$, то из минимальности контрпримера имеем, что подгруппа H σ-субнормальна в M. По лемме 7.3.16 из [7] $H^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq Core_G(M)$. Если $H^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$, то из минимальности контрпримера следует, что подгруппа $HCore_G(M)$ σ-субнормальна в G. $HCore_G(M) \subseteq M$, поэтому H σ-субнормальна в $HCore_G(M)$. Теперь по лемме 2 подгруппа H является σ-субнормальной в G. Снова пришли к противоречию. Итак, $H^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$ и $H \in \mathfrak{N}_\sigma$.

Предположим, что H не является примарной циклической группой. Тогда в H найдутся две различные максимальные подгруппы H_1 и H_2. Поскольку подгруппа H принадлежит формации $\mathfrak{N}_\sigma$, то подгруппы H_1 и H_2 σ-субнормальны в H. Следовательно, ввиду леммы 2 для любого $x \in G$ подгруппа H_1 σ-субнормальна в $\langle H_1, (H_1)^x\rangle$, а подгруппа H_2 σ-субнормальна в $\langle H_2, (H_2)^x\rangle$. Но тогда из минимальности контрпримера следует, что подгруппы H_1 и H_2 σ-субнормальны в G. По теореме 1.1 из [6] формация $\mathfrak{N}_\sigma$ обладает решеточным свойством. Поэтому подгруппа $H = \langle H_1, H_2\rangle$ σ-субнормальна в G. Пришли к противоречию с условием.

Следовательно, H — примарная циклическая группа. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $|H| = p^n$, где $p \in \sigma_1$.

Предположим, что $n > 1$. Пусть D — подгруппа порядка p^{n-1} из H. Очевидно, подгруппа D σ-субнормальна в H. Отсюда по лемме 2 она будет σ-субнормальной в подгруппе $\langle D, D^x\rangle$ для любого $x \in G$. Так как $|G| + |D| < |G| + |H|$, то из минимальности контрпримера следует, что подгруппа D σ-субнормальна в G. Но тогда по лемме 4 подгруппа D содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$-радикале группы G. А так как D является σ_1-группой, то $D \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. Если $D \neq 1$, то с учетом примитивности группы G имеем, что $N \subseteq O_{\sigma_1}(G)$. А значит, группа $G = HN$ является σ_1-группой и подгруппа H σ-субнормальна в G, что противоречит условию.

Таким образом, $D = 1$, т.е. H есть группа простого порядка p. Тогда либо G — простая неабелева группа, либо $H \cap N = 1$ и $G = N \rtimes H$, где $H = \langle h\rangle$.

Предположим, что подгруппа N не является простой. Тогда она представляется в виде $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где $t > 1$ и $N_1, N_2, \ldots, N_t$ — изоморфные простые группы. При этом N_1 не является σ_1-группой, так как в противном случае H σ-субнормальна в G. Как следует из 1.1.40 [8], $t = |G : N_G(N_1)| = |G : N| = |H| = p$. Подгруппа H сопряжением действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Так как $|H| = p$ — простое число, то, очевидно, что $H = \langle h\rangle$ для всякого неединичного элемента $h \in H$. Поэтому для каждого N_i из множества $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ имеем $N_i^h \neq N_i$. Таким образом, H действует на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$ регулярно. Отсюда если Q — силовская q-подгруппа из N_1 для некоторого простого числа q, не принадлежащего σ_1, то $R = Q \times Q^h \times \ldots \times Q^{h^{p-1}}$ — силовская q-подгруппа прямого произведения $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_p$. При этом подгруппа H нормализует R. Так как $|HR| < |G|$, то с учетом выбора группы G подгруппа H σ-субнормальна в HR. Тогда по лемме 4 H содержится в $\mathfrak{N}_\sigma$-радикале подгруппы HR. Из этого факта, в частности, выводим, что $H \subseteq O_{\sigma_1}(HR)$. Поскольку H — силовская p-подгруппа группы HR и число q не принадлежит σ_1, то $H = O_p(HR)$. А так как H нормализует R, то $HR = H \times R$. Пришли к противоречию с тем, что подгруппа H действует транзитивно на множестве $\{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Следовательно, $t = 1$ и подгруппа N является простой.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \ldots, \{p_n\}, \{\pi\}'\}$. Если подгруппа H σ-субнормальна в группе G, то из определения σ-субнормальной подгруппы и вида разбиения σ следует, что H является $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальной в G для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем обратное утверждение. Пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая подгруппами, которые $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальны в G для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, но не являются σ-субнормальными в G. Среди всех таких подгрупп выберем некоторую подгруппу H. Очевидно, $H \neq 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 1 подгруппа HN/N $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальна в G/N для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда с учетом выбора группы G подгруппа HN/N σ-субнормальна в G/N, а значит, по лемме 1 подгруппа HN σ-субнормальна в G. Отметим, что согласно лемме 2 подгруппа H является $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальной в HN для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому если $|HN| < |G|$, то ввиду выбора группы G подгруппа H будет σ-субнормальной в HN. Но тогда по лемме 2 она σ-субнормальна в G. Пришли к противоречию с выбором подгруппы H.

Полагаем далее, что $HN = G$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G. При этом, очевидно, $Core_G(H) = 1$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Тогда, очевидно, H — максимальная подгруппа группы G. По определению имеем, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа H субнормальна в G, либо $G/Core_G(H)$ является p_i-группой, либо $G/Core_G(H)$ — p_i'-группа. Ясно, что ввиду выбора подгруппа H не может быть субнормальной в G. Если группа $G/Core_G(H)$ есть p_i-группа, то подгруппа $H/Core_G(H)$ нормальна в $G/Core_G(H)$, а значит, и сама подгруппа H нормальна в G; противоречие. Следовательно, $G/Core_G(H)$ является p_i'-группой для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда $G/Core_G(H)$ — π'-группа. Отсюда и из $Core_G(H) = 1$ следует, что G — π'-группа. Это означает по определению, что подгруппа H является σ-субнормальной в группе G. Снова пришли к противоречию.

2. Пусть N — неабелева группа и группа G не содержит абелевых минимальных нормальных подгрупп. Предположим сначала, что $H \cap N \neq 1$. Отметим, что по лемме 2 подгруппа $H \cap N$ $\{\{p_i\}, \{p_i\}'\}$-субнормальна в N для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть сначала $N = G$, т. е. G — простая неабелева группа. Тогда существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является p_i-группой, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ — p_i'-группа. В частности, либо подгруппа H_{k-1} нормальна в G, либо $G/Core_G(H_{k-1})$ — p_i-группа, либо $G/Core_G(H_{k-1})$ является p_i'-группой. Так как группа G проста, то она является p_i'-группой для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, G — π'-группа. Но тогда подгруппа H — σ-субнормальна в G. Противоречие.

Поэтому полагаем далее, что $|N| < |G|$. Тогда ввиду выбора группы G подгруппа $H \cap N$ будет σ-субнормальной в N (а значит, и в G, так как N нормальна в G). Предположим, что $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$. По лемме 3 подгруппа $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ субнормальна в N, а из строения N следует, что подгруппа $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ нормальна в N. С другой стороны, из нормальности $H \cap N$ в H

имеем, что подгруппа $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ нормальна в H. Поэтому $G = HN \subseteq N_G((H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma})$, т. е. подгруппа $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma}$ нормальна в G. Так как $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$, то приходим к противоречию с тем, что $Core_G(H) = 1$.

Соответственно полагаем далее, что $(H \cap N)^{\mathfrak{N}_\sigma} = 1$, т. е. $H \cap N$ — σ-нильпотентная группа. По лемме 4 $H \cap N \subseteq F_\sigma(G)$. Отсюда следует, что N — $\pi^{'}$-группа. Так как подгруппа H является $\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}$-субнормальной в G, то существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_k = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является p_i-группой, либо $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ — $p_i^{'}$-группа. Но N есть $\pi^{'}$-группа и $G = HN$. Поэтому $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ не может быть p_i-группой. Следовательно, либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является $p_i^{'}$-группой. При этом если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то ввиду $G = HN$ фактор H_{i-1}/H_i также является $p_i^{'}$-группой. Теперь по лемме 3.17 из [9] подгруппа H содержит $\mathfrak{G}_{p_i^{'}}$-корадикал $O^{p_i^{'}}(G)$ группы G, где $\mathfrak{G}_{p_i^{'}}$ — формация всех $p_i^{'}$-групп. Если $O^{p_i^{'}}(G) \neq 1$, то приходим к противоречию с тем, что $Core_G(H) = 1$. Следовательно, $O^{p_i^{'}}(G) = 1$, а значит, H — $p_i^{'}$-группа. А так как N является $p_i^{'}$-группой, то G — $p_i^{'}$-группа. С учетом произвольного выбора индекса i отсюда получаем, что G — $\pi^{'}$-группа. Но тогда подгруппа H σ-субнормальна в группе G; противоречие.

Итак, $H \cap N = 1$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}}$ — формация всех $\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}$-нильпотентных групп. Ввиду леммы 3 подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G. Более того, подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ нормальна в H и по теореме Виландта из [10] $N \subseteq N_G(H^{\mathfrak{F}})$. Поэтому $G = \langle H, N\rangle \subseteq N_G(H^{\mathfrak{F}})$, т. е. подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ нормальна в G. Если $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то приходим к противоречию с тем, что $Core_G(H) = 1$.

Таким образом, $H^{\mathfrak{F}} = 1$, т. е. H — $\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}$-нильпотентная группа. По лемме 4 $H \subseteq F_{\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}}(G)$. Отсюда и из того, что группа G не содержит абелевых минимальных нормальных подгрупп, следует, что $H \subseteq O_{p_i^{'}}(G)$. С учетом произвольного выбора индекса i отсюда получаем, что $H \subseteq O_{\pi^{'}}(G)$. Если N не является $\pi^{'}$-группой, то $G = O_{\pi^{'}}(G) \times N$. Отсюда и из $H \subseteq O_{\pi^{'}}(G)$ имеем, что подгруппа H является σ-субнормальной в группе G; противоречие. Если же N является $\pi^{'}$-группой, то G — $\pi^{'}$-группа. Тогда, очевидно, подгруппа H σ-субнормальна в G. Снова приходим к противоречию.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть (G, H) — минимальный контрпример к теореме 2. Тогда согласно лемме 5 справедливы следующие утверждения:

1) H — группа простого порядка p;

2) G — простая неабелева группа либо является почти простой с цоколем N и имеет вид $G = N \rtimes H$.

Пусть p принадлежит π. Так как по условию подгруппа H σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$, то по лемме 4 $H \subseteq O_p(\langle H, x\rangle)$. В частности, $\langle H, H^x\rangle$ есть p-группа для любого $x \in G$. Отсюда по теореме Бэра из [11] $H \subseteq O_p(G)$. Пришли к противоречию с тем, что G — простая или почти простая группа.

Пусть теперь p не принадлежит π. Поскольку по условию подгруппа H σ-субнормальна в $\langle H, x\rangle$ для любого элемента $x \in G$, то по лемме 4 $H \subseteq O_{\pi^{'}}(\langle H, x\rangle)$. Из этого следует, что $\langle H, x\rangle \subseteq O_{\pi^{'}}(\langle H, x\rangle)\langle x\rangle$. Так как число 2 не принадлежит $\pi^{'}$, то подгруппа $\langle H, x\rangle$ является разрешимой для любого $x \in G$. Отсюда ввиду теоремы 1 из [12] $H \subseteq R(G)$, где $R(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Снова пришли к противоречию с тем, что G — простая или почти простая группа.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wielandt H.** Criterion of subnormality in finite groups // Math. Z. 1974. Vol. 138. P. 199–203. doi: 10.1007/BF01237117 .
2. **Skiba A.N.** On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010 .
3. **Kleidman P.B.** A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. Vol. 133, no. 2. P. 369–428. doi: 10.2307/2944342 .
4. **Kegel O.H.** Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Vol. 78, no. 1. P. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169 .
5. **Wielandt H.** Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Sympos. Pure Math. 1980. Vol. 37. P. 161–173. doi: 10.1090/pspum/037/604575 .
6. **Kamornikov S.F.** Permutability of subgroups and $\mathfrak{F}$-subnormality // Sib. Math. J. 1996. Vol. 37, no. 5. P. 936–949. doi: 10.1007/BF02110725 .
7. **Lennox J.C., Stonehewer S.E.** Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987. 270 p.
8. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. N Y: Springer, 2006. 385 p. doi: 10.1007/1-4020-4719-3 .
9. **Каморников С.Ф., Селькин М.В.** Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003. 256 p.
10. **Wielandt H.** Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen // Math. Z. 1958. Vol. 69, no. 8. P. 463–465. doi: 10.1007/BF01187422 .
11. **Baer R.** Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen // Ann. Math. 1957. Vol. 133, no. 3. P. 256–270. doi: 10.1007/BF02547953 .
12. **Guest S., Levy D.** Criteria for solvable radical membership via p-elements // J. Algebra. 2014. Vol. 415. P. 88–111. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.06.003 .

Поступила 4.06.2020
После доработки 30.06.2020
Принята к публикации 3.07.2020

Сунь Фенфен (Sun Fenfen)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
Чжэцзянский политехнический университет, г. Ханчжоу
e-mail: sun4624@163.com

Йи Сяолан (Yi Xiaolan)
Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China
Чжэцзянский политехнический университет, г. Ханчжоу
e-mail: yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель, Беларусь
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

REFERENCES

1. Wielandt H. Criterion of subnormality in finite groups. *Math. Z.*, 1974, vol. 138, pp. 199–203 (in German). doi: 10.1007/BF01237117 .
2. Skiba A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.04.010 .
3. Kleidman P.B. A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups. *Ann. Math.*, 1991, vol. 133, no. 2, pp. 369–428. doi: 10.2307/2944342 .

4. Kegel O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Math Z.*, 1962, vol. 78, no. 1, pp. 205–221. doi: 10.1007/BF01195169 .
5. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 1980, vol. 37, pp. 161–173. doi: 10.1090/pspum/037/604575 .
6. Kamornikov S.F. Permutability of subgroups and $\mathfrak{F}$-subnormality. *Sib. Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 936–949. doi: 10.1007/BF02110725 .
7. Lennox J.C., Stonehewer S.E. *Subnormal subgroups of groups.* Oxford: Clarendon Press, 1987, 270 p. ISBN: 9780198535522 .
8. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of finite groups.* N Y: Springer, 2006, 385 p. doi: 10.1007/1-4020-4719-3 .
9. Kamornikov S.F., Sel'kin M.V. *Podgruppovye funktory i klassy konechnykh grupp* [Subgroup functors and classes of finite groups]. Minsk: Belarusskaya Nauka Publ., 2003. 256 p.
10. Wielandt H. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. *Math. Z.*, 1958, vol. 69, no. 8, pp. 463–465. doi: 10.1007/BF01187422 .
11. Baer R. Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen. *Math. Ann.*, 1957, vol. 133, no. 3, pp. 256–270. doi: 10.1007/BF02547953 .
12. Guest S., Levy D. Criteria for solvable radical membership via p-elements. *J. Algebra*, 2014, vol. 415, pp. 88–111. doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.06.003 .

Received June 4, 2020
Revised June 30, 2020
Accepted July 3, 2020

Fenfen Sun, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: sun4624@163.com .

Xiaolan Yi, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, P. R. China, e-mail: yixiaolan2005@126.com .

Sergei Fedorovich Kamornikov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, 246019, Gomel, Republic of Belarus. e-mail: sfkamornikov@mail.ru .

Cite this article as: F. Sun, X. Yi, S. F. Kamornikov. Criterion of subnormality in a finite group: Reduction to elementary binary partitions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 211–218 .