Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВНО S–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Подгруппа H конечной группы G называется условно S-перестановочной, если для любого $p \in \pi(G)$ существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$. В работе исследуется строение конечной группы G, у которой все подгруппы Шмидта являются условно S-перестановочными.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.107

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, подгруппа Шмидта, условно S-перестановочная подгруппа.

К 80-летию Виктора Даниловича Мазурова

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Простая проверка показывает, что любая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну подгруппу Шмидта (т. е. подгруппу, являющуюся группой Шмидта). В связи с этим естественна задача исследования строения групп, обладающих системой подгрупп Шмидта с заданными свойствами.

Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. В частности, в [1] описаны группы с субнормальными подгруппами Шмидта. В [2, 3] для любого разбиения σ множества всех простых чисел исследованы группы, все подгруппы Шмидта которых σ-субнормальны. В [4] доказана разрешимость группы G с наследственно G-перестановочными подгруппами Шмидта.

В данной работе анализируется нормальное строение конечной группы, все подгруппы Шмидта которой условно S-перестановочны.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется *условно S-перестановочной*, если для любого $p \in \pi(G)$ существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$.

Исследования Каморникова С. Ф. и Тютянова В. Н. выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ-237).

Понятие условно S-перестановочной подгруппы введено в 2007 г. в работе [5]. Это понятие развивает концепцию S-перестановочной подгруппы, предложенную Кегелем в [6] (подгруппа H группы G называется *S-перестановочной*, если она перестановочна с любой силовской подгруппой группы G).

Влияние условно S-перестановочных подгрупп на строение группы изучалось в [7, 8]. В частности, в [7] предложены достаточные признаки p-нильпотентности и сверхразрешимости группы G, у которой условно S-перестановочны все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G. В [8] исследовалось строение разрешимой группы, у которой условно S-перестановочны все примарные подгруппы.

Наша главная цель — доказательство теорем 1 и 2, развивающих результаты работы [4].

Теорема 1. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта условно S-перестановочны. Тогда цоколь группы G является абелевым. В частности, G не является простой неабелевой группой.*

Определение 2. Пусть A, B — подгруппы группы G. Подгруппа A называется *G-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$. Подгруппа A группы G называется G-перестановочной в G, если она G-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Следствие 1 [4, теорема A]. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта G-перестановочны. Тогда цоколь группы G абелев. В частности, G не является простой неабелевой группой.*

В связи с теоремой 1 естественным образом возникает следующий

Вопрос. *Будет ли группа G разрешимой, если все ее подгруппы Шмидта являются условно S-перестановочными?*

Частичный ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Пусть G — группа, у которой каждая подгруппа Шмидта условно S-перестановочна в любой содержащей ее подгруппе из G. Тогда группа G разрешима.*

Определение 3. Пусть A, B — подгруппы группы G. Подгруппа A называется *наследственно G-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in \langle A, B\rangle$. Подгруппа A группы G называется *наследственно G-перестановочной в G*, если A наследственно G-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Следствие 2 [4, теорема B]. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта наследственно G-перестановочны. Тогда группа G разрешима.*

2. Используемая терминология и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [9].

Основное строение групп Шмидта (см. лемму 1) установлено в [10, 11].

Лемма 1. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\pi(S) = \{p, q\}$;

(2) $S = [P]\langle a\rangle$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа группы S, $\langle a\rangle$ — ее силовская q-подгруппа, $\langle a^q\rangle \subseteq Z(S)$;*

(3) *P — $\mathfrak{N}$-корадикал группы S, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из S, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп);*

(4) *$P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $S/\Phi(P)$, $\Phi(P) = P^{'} \subseteq Z(S)$;*

(5) *$\Phi(S) = Z(S) = P^{'} \times \langle a^q \rangle$;*

(6) *$C_P(a) = \Phi(P)$;*

(7) *если $Z(S) = 1$, то $|S| = p^m q$, где m — показатель p по модулю q.*

Далее группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и не нормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть *$S_{\langle p,q\rangle}$-группой*.

Лемма 2 [12, лемма 2]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы из L нильпотентны;*

(3) *подгруппа L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = (P : Q)^L = Q^L$.*

Лемма 3. *Если H — условно S-перестановочная подгруппа группы G и H содержится в субнормальной подгруппе N группы G, то H условно S-перестановочна в N.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. По условию существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$. Так как подгруппа N субнормальна в G, то $P \cap N = P_0$ — силовская p-подгруппа в N. Тогда

$$HP_0 = H(P \cap N) = HP \cap N = PH \cap N = (P \cap N)H = P_0H.$$

Отсюда ввиду произвольного выбора $p \in \pi(G)$ имеем, что H — условно S-перестановочная подгруппа группы N.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то группа G является p-нильпотентной.*

Доказательство следует из теоремы Ито [13] о том, что любая минимальная не p-нильпотентная группа является группой Шмидта.

Лемма 5 [14, лемма 3]. *Пусть G — простая группа Шевалле, не принадлежащая списку*

$$\{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

Лемма 6 [15, лемма 1.6]. *Пусть G — простая группа Шевалле и U — ее унипотентная подгруппа. Если L — максимальная подгруппа группы G и $U \subseteq L$, то L — параболическая подгруппа группы G.*

Напомним, что *разрешимым графом*, соответствующим группе G (обозначается $\Gamma_{sol}(G)$), называется такой простой граф, вершины которого являются простыми делителями порядка группы G и два различных простых числа p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в группе G существует разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq. Вершина графа называется *центральной*, если она смежна со всеми другими его вершинами. Центр графа — это множество всех его центральных вершин.

Лемма 7. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта условно S-перестановочны и $r = \max\{p \mid p \in \pi(G)\}$. Если $r \geq 19$, то группа G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что G — простая неабелева группа. Согласно лемме 4 группа G имеет r-замкнутую подгруппу Шмидта S. Пусть $p \in \pi(G)$ и $P \in Syl_p(G)$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $SP = PS$, а потому SP — подгруппа группы G. Очевидно, что $|\pi(SP)| \leq 3$. Предположим, что подгруппа SP не является разрешимой. Тогда она содержит простую секцию, изоморфную некоторой триприкарной группе. Простые неабелевы триприкарные группы описаны (см., например, [16, с. 20]): они принадлежат списку

$$\{L_2(5), L_2(7), L_2(8), L_2(9), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)\}.$$

Проверка групп из приведенного списка показывает, что $r \leq 17$. Пришли к противоречию с условием $r \geq 19$.

Следовательно, подгруппа SP разрешима. Поэтому вершины r и p смежны в графе $\Gamma_{sol}(G)$. Так как p — произвольный простой делитель числа $|G|$, то $r \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Согласно [17, теорема 1.3] группа G не является простой неабелевой группой.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Предположим, что G содержит собственную простую неабелеву субнормальную подгруппу N. По лемме 3 все подгруппы Шмидта из N условно S-перестановочны в N. Отсюда и из $|N| < |G|$ следует, что цоколь подгруппы N абелев. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Следовательно, G — простая неабелева группа. Опираясь на классификацию простых групп, исключим каждый из возможных случаев.

1. G — знакопеременная группа A_n, где $n \geq 5$.

Согласно лемме 7 достаточно рассмотреть случаи, когда $n \leq 18$.

(1) $G \in \{A_5, A_6\}$. Тогда группа G содержит подгруппу Шмидта $3:2$ (см., например, [18, с. 2, 4]), которая не перестановочна ни с одной силовской 5-подгруппой группы G, что противоречит условию.

(2) $G \cong A_7$. Тогда группа G содержит подгруппу Шмидта $3:2$, которая не перестановочна ни с одной силовской 7-подгруппой группы G [18, с. 10]. Снова пришли к противоречию с условием.

(3) $G \cong A_8$. Тогда группа G содержит диэдр $D \cong 5:2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $2^6 \cdot 5$, что невозможно, так как в группе A_8 нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $2^6 \cdot 5$ [18, с. 22].

(4) $G \cong A_9$. Группа A_9 содержит единственный класс максимальных подгрупп нечетного индекса, изоморфных A_8 [18, с. 37]. Теперь противоречие следует из п. (3).

(5) $G \cong A_{10}$. Группа A_{10} содержит два класса максимальных подгрупп нечетного индекса, представители которых изоморфны S_8 и $2^4 : S_5$ [18, с. 48].

Группа G содержит диэдр $D \cong 5 : 2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $2^7 \cdot 5$. Если DS содержится в подгруппе, изоморфной S_8, то последняя содержит подгруппу порядка $2^7 \cdot 5$, что невозможно (см. п. (4) и [18, с. 22]). Если DS содержится в подгруппе, изоморфной $2^4 : S_5$, то группа S_5 содержит подгруппу прядка $5 \cdot 2^3$, что также невозможно [18, с. 2].

(6) $G \cong A_{11}$. Группа G содержит диэдр $D \cong 11 : 5$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Однако в группе G нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ [18, с. 75]; противоречие.

(7) $G \cong A_{12}$. Тогда группа G содержит диэдр $D \cong 11 : 5$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^9$, что невозможно, так как в группе A_{12} нет максимальных подгрупп нечетного индекса, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^9$ [18, с. 91].

(8) $G \cong A_{13}$. Группа A_{13} содержит максимальную подгруппу $13 : 6$ [18, с. 104] и, следовательно, группа G содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 3$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $13 \cdot 3 \cdot 2^9$. Последнее невозможно, так как в группе A_{13} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $13 \cdot 3 \cdot 2^9$ [18, с. 104].

(9) $G \cong A_{14}$. Пусть H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса. Тогда ввиду [19] подгруппа H изоморфна одной из групп следующего списка:

$$\{(S_2 \times S_{12}) \cap A_{14}, (S_4 \times S_{10}) \cap A_{14}, (S_6 \times S_8) \cap A_{14}, (S_2 \wr S_7) \cap A_{14}\}.$$

Следовательно, $|G : H|$ делится на 13. Группа A_{14} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 3$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $13 \cdot 3 \cdot 2^9$, имеющая в G нечетный индекс, который не делится на 13; противоречие.

(10) $G \cong A_{15}$. Группа A_{13} содержит максимальную подгруппу $13 : 6$ [18, с. 104] и, следовательно, группа G содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS, которая является холловой $\{2, 13\}$-подгруппой группы G, что невозможно ввиду [20].

(11) $G \cong A_{16}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна либо группе $(S_2 \wr S_8) \cap A_{16}$, либо группе $(S_4 \wr S_4) \cap A_{16}$. Следовательно, $|G : H|$ делится на 13. Далее, рассуждая по аналогии с п. (9), приходим к противоречию.

(12) $G \cong A_{17}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна группе A_{16}. Следовательно, $|G : H| = 17$. Кроме того, группа G содержит диэдр $D \cong 17 : 2$ [19, табл. 1]. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS, которая имеет в G нечетный индекс, не делящийся на 17, что невозможно.

(13) $G \cong A_{18}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна либо группе $(S_2 \times S_{16}) \cap A_{18}$, либо группе $(S_2 \wr S_9) \cap A_{18}$. Следовательно, $|G : H|$ делится на 17. Далее, рассуждая по аналогии с п. (12), приходим к противоречию.

2. G — простая спорадическая группа.

Согласно лемме 7 группа G принадлежит списку

$$\{M_{11}, M_{12}, M_{22}, J_2, HS, M^cL, Suz, He, Fi_{22}\}.$$

Рассмотрим каждый из возможных случаев.

(1) $G \cong M_{11}$. Группа M_{11} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 18]. Тогда в G существует подгруппа DS, где S — силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $11 \cdot 5 \cdot 2^4$. Пришли к противоречию с тем, что в группе M_{11} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^4$ (см. [18, с. 18]).

(2) $G \cong M_{12}$. Группа M_{12} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 33]. Тогда по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $11 \cdot 5 \cdot 2^6$. Однако в группе M_{12} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^6$ [18, с. 33]. Снова пришли к противоречию.

(3) $G \cong M_{22}$. Группа M_{22} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 39]. Тогда по условию в G существует подгруппа DS, где S — силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы $11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Так как в M_{22} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ [18, с. 39], приходим к противоречию.

(4) $G \cong J_2$. Группа J_2 содержит подгруппу Шмидта $D \cong 7 : 3$ [18, с. 42]. Тогда для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS. Ее порядок равен $7 \cdot 3 \cdot 2^7$. Пришли к противоречию с тем, что в группе J_2 нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $7 \cdot 3 \cdot 2^7$ [18, с. 42].

(5) $G \cong HS$. Группа HS содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 80]. Тогда по условию в группе G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы DS равен $11 \cdot 5 \cdot 2^9$. Однако в группе HS нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^9$ [18, с. 80]; противоречие.

(6) $G \cong M^cL$. Группа M^cL содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 100]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G в G существует подгруппа DS и $|DS| = 11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Единственным классом максимальных подгрупп в M^cL, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$, является класс подгрупп, изоморфных M_{22}. Из п. (3) следует, что в группе M_{22} подгрупп порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ не существует. Снова пришли к противоречию.

(7) $G \cong Suz$. Группа Suz содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 131]. Тогда, как и в п. (6), показывается, что в G существует подгруппа порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^{13}$. Пришли к противоречию, так как в группе Suz нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^{13}$ (см. [18, с. 131]).

(8) $G \cong He$. Группа He содержит подгруппу Шмидта $D \cong 17 : 2$ [18, с. 104]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S в G существует подгруппа DS, порядок которой равен $17 \cdot 2^{10}$. Однако в группе He нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $17 \cdot 2^{10}$ [18, с. 104]; противоречие.

(9) $G \cong Fi_{22}$. Группа Fi_{22} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 163]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S в G существует подгруппа DS и ее порядок равен $11 \cdot 5 \cdot 2^{17}$. Единственным классом

максимальных подгрупп в Fi_{22}, порядок которых делится на $11\cdot5\cdot2^{17}$, является класс подгрупп, изоморфных $2^{10}:M_{22}$. Однако из п. (3) следует, что в группе M_{22} подгрупп порядка $11\cdot5\cdot2^7$ не существует. Снова пришли к противоречию.

3. G — простая группа лиева типа над полем характеристики p.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G не принадлежит списку

$$\{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

По лемме 5 найдется простое число $r\in\pi(G)$ такое, что r не делит порядок любой собственной параболической подгруппы группы G. Кроме того, согласно лемме 4 в группе G существует r-замкнутая подгруппа Шмидта $R:T$. По условию теоремы существует подгруппа $U(R:T)$, где U — унипотентная подгруппа группы G. В силу леммы 6 подгруппа $U(R:T)$ содержится в некоторой собственной максимальной параболической подгруппе P группы G. Если $P\neq G$, то r делит $|P|$, что невозможно. Следовательно, $U(R:T)=G$. В этом случае

$$G\in\{L_2(5), L_3(2), L_2(8), L_2(9), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)\}$$

(см., например, [16, с. 20]). Поскольку U — унипотентная подгруппа в соответствующей группе лиева типа, то последняя факторизация имеет место лишь в двух случаях: $L_3(2)=D_8\cdot(7:3)$ $(p=2)$ и $L_2(5)=5\cdot A_4$ $(p=5)$ [18]. Простая проверка показывает, что эти группы содержат подгруппы Шмидта, которые не являются условно S-перестановочными в G.

Таким образом,

$$G\in\{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

(a) $G\cong SL_6(2)$. Тогда $|G|=2^{15}\cdot3^4\cdot5\cdot7^2\cdot31$. Из [21, табл. 8.24, 8.18] следует, что группа G содержит подгруппу Шмидта $L\cong 31:5$. Из [21, табл. 8.24] имеем, что порядок любой максимальной подгруппы группы G не делится на $31\cdot5\cdot7^2$. Поэтому подгруппа L не перестановочна ни с одной силовской 7-подгруппой группы G, что противоречит условию теоремы.

(b) $G\cong Sp_6(2)$. Тогда $|G|=2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7$. Группа $Sp_6(2)$ содержит диэдр $D\cong5:2$. Поэтому в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $2^9\cdot5$. В группе $Sp_6(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^9\cdot5$, является подгруппа $2^5:S_6$ [18, с. 46]. Отсюда следует, что группа S_6 содержит подгруппу порядка $2^4\cdot5$, что невозможно [18, с. 4].

(c) $G\cong\Omega_8^+(2)$. Тогда $|G|=2^{12}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7$. Группа $\Omega_8^+(2)$ содержит диэдр $D\cong5:2$. Поэтому по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной группы равен $2^{12}\cdot5$. В группе $\Omega_8^+(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^{12}\cdot5$, является подгруппа $2^6:A_8$ [18, с. 85]. Отсюда следует, что группа A_8 имеет подгруппу порядка $2^6\cdot5$. Однако A_8 подгруппой такого порядка не обладает [18, с. 22]. Снова пришли к противоречию.

(d) $G\cong SU_4(2)$. Тогда $|G|=2^6\cdot3^4\cdot5$. Группа $SU_4(2)$ содержит диэдр $D\cong5:2$. Поэтому по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной группы равен $2^6\cdot5$. В группе

$SU_4(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^6{\cdot}5$, является подгруппа $2^4:A_5$ [18, с. 26]. Отсюда следует, что группа A_5 имеет подгруппу порядка $2^2\cdot 5$,что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Тогда каждая подгруппа Шмидта из G условно S-перестановочна в любой ее содержащей подгруппе и G не является разрешимой. Если M — максимальная подгруппа группы G и H — ее подгруппа Шмидта, то ввиду условия теоремы H условно S-перестановочна в любой содержащей ее подгруппе из M. Отсюда в силу выбора группы G имеем, что M разрешима.

Таким образом, G — минимальная неразрешимая группа. Простая проверка показывает, что $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [22]. Этот список содержит следующие группы:

— $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;

— $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;

— $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$;

— $PSL_3(3)$;

— $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Отметим, что ввиду теоремы 1 $\Phi(G)\neq 1$.

Рассмотрим каждый из возможных случаев.

1. Пусть $G/\Phi(G)\cong PSL_3(3)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $3:2$ (см., например, [18, с. 13]). По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=3^\alpha$, $|Q|=2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 13-подгруппа R такая, что $R(P:Q)=(P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 13-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Из свойств подгруппы Фраттини следует, что $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на 26, что невозможно [18, с. 13].

2. Пусть $G/\Phi(G)\cong Sz(2^p)$, p — простое нечетное число. Как следует из [23], $|Sz(2^p)|$ — произведение четырех попарно взаимно простых чисел 2^{2p}, 2^p-1, $2^p+\sqrt{2^{p+1}}+1$ и $2^p-\sqrt{2^{p+1}}+1$. Кроме того, группа $Sz(2^p)$ содержит подгруппу Фробениуса $2^{2p}:(2^p-1)$. Поэтому $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, где r — некоторый простой делитель числа 2^p-1. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=2^\alpha$, $|Q|=r^\beta$. Группа $Sz(2^p)$ содержит максимальный тор порядка $2^p+\sqrt{2^{p+1}}+1$. Пусть t — некоторый простой делитель порядка данного тора. Ввиду условия теоремы в G существует силовская t-подгруппа T такая, что $T(P:Q)=(P:Q)T$, т. е. G содержит подгруппу $T(P:Q)$. Очевидно, $T(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $T\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Из

свойств подгруппы Фраттини следует, что $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$.

Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на простые числа из $\pi(2^p-1)$ и $\pi(2^p+\sqrt{2^{p+1}}+1)$. Ввиду [23] последнее невозможно.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [24, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

3. Пусть $G/\Phi(G)\cong PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3. Отметим, что

$$|PSL_2(3^p)| = 3^p\cdot(3^p-1)\cdot(3^p+1)/2.$$

Кроме того, $3^p-1=2m$, где $(2,m)=1$, и $3^p+1=4f$, где $(2,f)=1$. Группа $PSL_2(3^p)$ содержит подгруппу Фробениуса порядка $3^p\cdot(3^p-1)/2$ с дополнительным множителем, являющимся циклической группой порядка $(3^p-1)/2$. При этом число $(3^p-1)/2$ нечетно. Пусть r — некоторый простой делитель этого числа. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,r\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=3^\alpha$, $|Q|=r^\beta$. Группа $PSL_2(3^p)$ содержит циклическую подгруппу порядка $(3^p+1)/2$. Как отмечено выше, число $(3^p+1)/2$ делится на некоторое простое нечетное число t. Из условия теоремы следует, что G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Группа $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ имеет нечетный порядок. Следовательно, она является собственной подгруппой группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на нечетное простое число, делящее 3^p-1, и нечетное простое число, делящее 3^p+1, что невозможно. Снова пришли к противоречию.

4. Пусть $G/\Phi(G)\cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$. Группа $PSL_2(p)$ содержит подгруппу Шмидта, изоморфную A_4. Поэтому $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,3\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,3\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=2^\alpha$, $|Q|=3^\beta$.

Рассмотрим два возможных случая.

(a) Пусть $3\in\pi(p-1)$. Если $p+1$ не является степенью числа 2, то выберем нечетное число $r\in\pi(p+1)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская r-подгруппа R такая, что $R(P:Q)=(P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую r-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Поскольку порядок подгруппы $R(P:Q)$ не делится на p, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на число 3, делящее $p-1$, и нечетное простое число, делящее $p+1$, что невозможно.

Пусть теперь $p+1=2^\alpha$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 2-подгруппа R такая, что $R(P:Q)$ — подгруппа группы G. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 2-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Если $p>7$, то $G/\Phi(G)$

содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на $3 \in \pi(p-1)$ и на порядок силовской 2-подгруппы группы $G/\Phi(G)$, что невозможно.

Таким образом, $G/\Phi(G) \cong PSL_2(7)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $3:2$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 3^\alpha$, $|Q| = 2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 7-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 7-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, порядок которой равен либо 14, либо 42, что невозможно.

(б) Пусть $3 \in \pi(p+1)$. Если $p-1$ не является степенью числа 2, то выберем нечетное число $r \in \pi(p-1)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская r-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую r-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Так как порядок подгруппы $R(P:Q)$ не делится на p, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на число 3, делящее $p+1$, и нечетное простое число, делящее $p-1$. Последнее невозможно.

Пусть $p-1 = 2^n$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 2-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 2-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Поскольку Q не содержится в $\Phi(G)$, имеем $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. В этом случае $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на $3 \in \pi(p+1)$ и на порядок силовской 2-подгруппы группы $G/\Phi(G)$.

Поскольку $p > 7$, силовская 2-подгруппа группы $G/\Phi(G)$ имеет порядок больше 8. Так как $p+1 \not\equiv 0 \pmod 4$, отсюда следует, что указанная собственная подгруппа не может содержаться ни в одной максимальной подгруппе группы $G/\Phi(G)$. Последнее невозможно.

5) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число.

Рассмотрим случаи $p=2$, $p=3$ и $p>3$.

а) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(4)$. Предположим, что $5 \notin \pi(\Phi(G))$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 5,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $5:2$, и по лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 5,2\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$ и P не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 5^\alpha$, $|Q| = 2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 3-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 3-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Ясно, что $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу порядка 30, что невозможно. Следовательно, $5 \in \pi(\Phi(G))$.

Пусть $S/\Phi(G)$ — подгруппа группы $G/\Phi(G)$, имеющая порядок 3. Очевидно, $S = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 3-элемента x группы G. Предположим, что S не является нильпотентной группой. Тогда она 3-нильпотентна и содержит 3-нильпотентную подгруппу Шмидта D, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $S =$

$D\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 5-подгруппа A такая, что $AD = DA$, т. е. G содержит подгруппу DA. Очевидно, $AD\Phi(G)/\Phi(G) = AS\Phi(G)$ содержит силовскую 5-подгруппу $A\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 15, что невозможно.

Таким образом, S — нильпотентная группа. Пусть H — силовская 5-подгруппа группы $\Phi(G)$. Очевидно, $C_G(H) \trianglelefteq G$ и $C_G(H)$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(H) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Пришли к противоречию с тем, что мультипликатор Шура группы $PSL_2(4)$ имеет порядок 2 (см., например, [16]).

(б) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$. Тогда $|PSL_2(8)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Пусть $S/\Phi(G)$ — силовская 7-подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $S = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 7-элемента x группы G. Предположим, что S не является нильпотентной группой. Тогда она 7-нильпотентна и содержит 7-нильпотентную подгруппу Шмидта D, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $S = D\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 3-подгруппа A такая, что $AD = DA$, т. е. G содержит подгруппу DA. Очевидно, $AD\Phi(G)/\Phi(G) = AS\Phi(G)$ содержит силовскую 3-подгруппу $A\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 63, что невозможно.

Таким образом, S — нильпотентная группа. Пусть H — холлова $\{2,3\}$-подгруппа группы $\Phi(G)$. Очевидно, $C_G(H) \trianglelefteq G$ и $C_G(H)$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(H) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Так как мультипликатор Шура группы $PSL_2(8)$ тривиален (см., например, [16]), то $H = 1$.

Пусть $F/\Phi(G)$ — силовская 3-подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $F = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 3-элемента x группы G. Предположим, что F не является нильпотентной группой. Тогда она 7-нильпотентна и содержит 7-нильпотентную подгруппу Шмидта B, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $F = B\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 7-подгруппа L такая, что $LB = BL$, т. е. G содержит подгруппу BL. Очевидно, $BL\Phi(G)/\Phi(G) = FL\Phi(G)$ содержит силовскую 7-подгруппу $L\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на 21, что невозможно.

Таким образом, F — нильпотентная группа. Очевидно, $C_G(\Phi(G)) \trianglelefteq G$ и $C_G(\Phi(G))$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(\Phi(G)) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Так как мультипликатор Шура группы $PSL_2(8)$ тривиален (см., например, [16]), то $\Phi(G) = 1$.

Теперь ввиду условия теоремы все подгруппы Шмидта группы $PSL_2(8)$ являются условно S-перестановочными. Пришли к противоречию с теоремой 1.

(в) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число, большее 3. Отметим, что $|PSL_2(2^p)|$ — произведение трех попарно взаимно простых чисел 2^{2p}, $2^p - 1$, $2^p + 1$. Кроме того, при $p > 3$ число простых делителей порядка группы $PSL_2(2^p)$ не меньше 4 (см., например, [16, с. 20]). Группа $PSL_2(2^p)$ содержит подгруппу Фробениуса порядка $2^p \cdot (2^p - 1)$ с дополнительным множителем, являющимся циклической группой порядка $2^p - 1$. Пусть r — некоторый простой делитель этого числа. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 2^\alpha$, $|Q| = r^\beta$. Группа $PSL_2(2^p)$ содержит циклическую подгруппу порядка $2^p + 1$. Пусть $t \in \pi(2^p + 1)$

и R — силовская t-подгруппа группы G. Из условия теоремы следует, что G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Поскольку Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Так как $|\pi(R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G))| \leq 3$, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на нечетное простое число, делящее $2^p - 1$, и нечетное простое число, делящее $2^p + 1$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

2. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Yi X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2022. V. 45, N 5. P. 2431–2440.

3. *Йи С., Ли М., Каморников С. Ф.* Конечные группы с системой обобщенно субнормальных подгрупп Шмидта // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 89–97.

4. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V., Tyutyanov V. N.* Finite groups with G-permutable Schmidt subgroups // Mediterr. J. Math. 2023. V. 20, N 3. Paper N 174, 12 p.

5. *Huang J., Guo W.* S-conditionally permutable subgroups of finite groups // Chin. Ann. Math. 2007. V. 28, N 1. P. 17–26.

6. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.

7. *Xu Y., Li X. H.* S-Conditionally permutable subgroups and p-nilpotency of finite groups // Ukr. Math. J. 2014. V. 66, N 6. P. 961–967.

8. *Mirdamadi E., Rezaeezadeh G.* Finite groups with some S-conditionally permutable subgroups // J. Algebra Appl. 2017. V. 16, N 12. Article ID 1750224. 12 p.

9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

10. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 366–372.

11. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

12. *Монахов В. С., Княгина И. Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

13. *Ito N.* Note on (LN)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. V. 3, N 1–2. P. 1–6.

14. *Тютянов В. Н., Шеметков Л. А.* Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 52–55.

15. *Seitz G. M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. V. 97, N 1. P. 27–56.

16. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

17. *Amberg B., Carocca A., Kazarin L. S.* Criteria for the solubility and non-simplicity of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 285, N 1. P. 58–72.

18. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.

19. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. V. 111, N 2. P. 365–383.

20. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.

21. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013.

22. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74, N 3. P. 383–437.

23. *Suzuki M.* On a class of double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

24. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1968.

Поступила в редакцию 15 июля 2023 г.
После доработки 4 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Шеметкова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru