А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, А. К. Фурс, Конечные группы с тремя несопряженными максимальными формационными подгруппами, *Матем. заметки*, 2022, том 111, выпуск 3, 354–364

DOI: 10.4213/mzm13324

Математические заметки

Том 111 выпуск 3 март 2022

УДК 512.542

Конечные группы с тремя несопряженными максимальными формационными подгруппами

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, А. К. Фурс

Получено конструктивное описание наследственных Z-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ конечных разрешимых групп, содержащих всякую разрешимую группу, имеющую три попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие $\mathfrak{F}$. Установлено, что конечная группа G сверхразрешима, если G имеет три попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее коммутант G' нильпотентен.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, Z-насыщенная формация, формация с условием Белоногова, формация с условием Кегеля, сверхразрешимая группа.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13324

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что *максимальной подгруппой* группы называется любой максимальный элемент множества всех ее собственных подгрупп, упорядоченных по включению. Знание свойств максимальных подгрупп во многих случаях позволяет получить существенную информацию о строении группы в целом. В этом направлении выделим проблему распознавания принадлежности конечной группы G заданному классу $\mathfrak{F}$ в зависимости от наличия в ней попарно несопряженных максимальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Начало исследованию этой проблемы было положено в работах Белоногова [1], [2], в которых им было установлено, что конечная группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. Семенчук [3] в классе разрешимых групп получил аналогичный результат для класса всех p-замкнутых групп.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Класс $\mathfrak{F}$ назовем *классом с условием Белоногова в классе* $\mathfrak{X}$ (кратко, *$\mathcal{B}$-классом в* $\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу G, которая имеет три попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие $\mathfrak{F}$.

Естественной является следующая

Проблема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Найти (конструктивно описать) все $\mathcal{B}$-классы ($\mathcal{B}$-формации, $\mathcal{B}$-классы Фиттинга, $\mathcal{B}$-классы Шунка) $\mathfrak{F}$ групп в $\mathfrak{X}$.

В работах [4], [5] были конструктивно описаны все нормально наследственные (наследственные) насыщенные $\mathcal{B}$-формации в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп. В [6] были найдены условия, при которых формация Фиттинга является $\mathcal{B}$-классом в $\mathfrak{S}$.

Изучение $\mathcal{B}$-формаций в классе $\mathfrak{X}$, состоящем из разрешимых групп, тесно связано с проблемой описания формаций с условием Кегеля, кратко, $\mathcal{K}$-формаций. Напомним [4], что *$\mathcal{K}$-формацией* называется формация $\mathfrak{F}$, которая содержит всякую группу

$$G = AB = BC = CA,$$

где подгруппы A, B и C принадлежат $\mathfrak{F}$. Впервые $\mathcal{K}$-формации были исследованы Кегелем в 1965 году в [7]. В частности, им было доказано, что $\mathcal{K}$-формациями являются классы всех нильпотентных и всех p-замкнутых групп. Отвечая на поставленный Кегелем в [7] вопрос, Казарин с помощью своего фундаментального результата из [8] по модулю классификации конечных простых неабелевых групп доказал в [9], что класс $\mathfrak{S}$ является $\mathcal{K}$-формацией. Пример знакопеременной группы A_5 показывает, что $\mathfrak{S}$ не является $\mathcal{B}$-формаций.

Отметим, что любая $\mathcal{K}$-формация по теореме Оре о сопряженности в разрешимой группе максимальных подгрупп, имеющих одинаковые ядра, является $\mathcal{B}$-формацией в классе $\mathfrak{S}$. До настоящего времени обратное утверждение и конструктивное описание $\mathcal{B}$-формаций в классе $\mathfrak{S}$ было получено для случаев, когда $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной (наследственной) насыщенной формацией [4], [5], или формацией Фиттинга с дополнительным условием: для каждого простого $p \in \operatorname{char}(\mathfrak{F})$ и каждой примитивной $\mathfrak{F}$-группы G, у которой цоколь является p-группой, класс $\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_q$ лежит в $\mathfrak{F}$ для всех простых чисел $q \neq p$ таких, что q делит $G/\operatorname{Soc}(G)$ [6].

В настоящей работе в классе $\mathfrak{S}$ мы решаем проблему 1 для значительно более широкого семейства формаций, чем класс всех наследственных насыщенных формаций.

Напомним [10; раздел 12.7], что главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{F}$-центральным*, если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}.$$

В работе [11] Шеметков обратил внимание на важность изучения формаций $\mathfrak{F}$, совпадающих с классом всех групп, у которых каждый главный фактор является $\mathfrak{F}$-центральным, и поставил проблему их описания. Такими формациями, в частности, являются все насыщенные формации. В настоящей работе мы такие формации для краткости называем *Z-насыщенными*. Решению проблемы Шеметкова посвящена работа [12] Баллестер-Болиншеса и Перец-Рамос.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс разрешимых групп, у которых ранги главных факторов не превосходят натурального числа $n > 1$. Прямой проверкой доказывается, что $\mathfrak{F}$ – Z-насыщенная наследственная формация. Ввиду [13; теорема VII.2.18] формация $\mathfrak{F}$ ненасыщена. С другой стороны, класс всех абелевых групп является наследственной не Z-насыщенной формацией.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная Z-насыщенная формация разрешимых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *$\mathfrak{F}$ является $\mathcal{K}$-формацией в $\mathfrak{S}$*;

(2) *$\mathfrak{F}$ является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{S}$;*

(3) *каждая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка;*

(4) *$\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, которая имеет следующее полное локальное определение f:*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Следующая полученная нами теорема дает полное решение следующей задачи: описать все наследственные насыщенные формации $\mathfrak{X}$, у которых любая наследственная насыщенная подформация является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда любая наследственная насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{X}$ является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{X}$, когда формация $\mathfrak{X}$ состоит из групп, имеющих нильпотентный коммутант.*

Следствие 1. *Если группа G имеет три попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

2. Предварительные результаты. В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографии [13]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе. Пусть G – группа. Для подгруппы H из G используются обозначения $H \leqslant G$ и $H < G$, если $H \neq G$. Через $|G|$ обозначается порядок G; $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$; $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{X}} \pi(G)$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп; C_n – циклическая группа порядка n, 1 – единичная подгруппа (группа). Группа $\mathrm{Core}_G(M)$ – ядро подгруппы M в G, т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; $E(n\,|\,p)$ – группа, имеющая единственную минимальную самоцентрализуемую нормальную p-подгруппу, факторгруппа по которой изоморфна C_n, где $(n,p) = 1$ (эта группа существует и единственна с точностью до изоморфизма по [13; теорема B.12.4]). $F(G)$ – подгруппа Фиттинга G, т.е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа G; $O_{p',p}(G)$ – p-нильпотентный радикал G, т.е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; π – подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Формации $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – формации всех нильпотентных, абелевых групп и с нильпотентным коммутантом групп соответственно; $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп.

Формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется:

1) *наследственной*, если всякая подгруппа $\mathfrak{F}$-группы G принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) *насыщенной*, если группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, как $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

Наименьшая нормальная подгруппа N группы G, для которой $G/N \in \mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* G и обозначается $G^{\mathfrak{F}}$.

Функция $f\colon \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальной функцией.* Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальная функция f такая, что $\mathfrak{F}$ состоит из всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. В этом случае f называется *локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Минимальной не $\mathfrak{X}$-группой называется группа $G \notin \mathfrak{X}$ такая, что любая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{X}$. Группа Шмидта – это минимальная не $\mathfrak{N}$-группа.

3. Доказательства основных результатов. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма, полученная в работе [14].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Z-насыщенная формация и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$. Тогда*:
(1) *если $\Phi(G) = 1$, то $G = N \rtimes M$, где $M \in \mathfrak{F}$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа G*;
(2) *если G нильпотентна, то $G \simeq C_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$*;
(3) *$G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$*;
(4) *если $G/\Phi(G)$ – группа Шмидта, то и G – группа Шмидта.*

Ключевое значение в доказательстве теоремы 1 имеет следующая

Лемма 2 [4; лемма 2]. *Пусть q – некоторое простое число, n – натуральное число, $n > 1$. Тогда существует q-группа Q такая, что ее экспонента не меньше q^n, но в группе Q найдутся по крайней мере две максимальные подгруппы M_1 и M_2 экспоненты меньше q^n.*

Доказательство теоремы 1. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть разрешимая группа G имеет три попарно несопряженные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, принадлежащие формации $\mathfrak{F}$. Из попарной несопряженности подгрупп M_1, M_2, M_3 ввиду теоремы Оре получаем, что

$$G = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1.$$

Ввиду (1) получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Утверждение (2) доказано.

Установим, что из (2) следует (3). Пусть G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Вначале предположим, что G нильпотентна. Ввиду (2) леммы 1 получаем, что G является группой простого порядка p, где p не принадлежит $\pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что G ненильпотентна. Вначале рассмотрим случай $\Phi(G) = 1$. В этом случае по (1) леммы 1 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{F}}$, причем N – элементарная абелева p-подгруппа, p – некоторое простое число и $N = C_G(N)$. Кроме того, $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа группы G. Ясно, что $M \in \mathfrak{F}$. Предположим, что в M имеется по крайней мере две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2. Рассмотрим подгруппы $R_1 = NH_1$, $R_2 = NH_2$, $R_3 = M$. Нетрудно видеть, что они являются попарно несопряженными максимальными подгруппами G и принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{B}$-формацией, получаем $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G. Будем считать, что M является циклической подгруппой порядка q^n, где q – некоторое простое число.

Предположим, что $n > 1$. Обозначим циклическую подгруппу порядка q^k, где $k < n$, подгруппы M через S. Рассмотрим подгруппу $R = NS$. Из $S \triangleleft M$ по теореме Клиффорда [13; теорема B.7.11] N является вполне приводимым R-модулем, и мы можем записать $N = N_1 \times \cdots \times N_t$, где каждая N_i является минимальной нормальной подгруппой в R. Покажем, что что найдется такая подгруппа N_i, что $C_S(N_i) = 1$. Допустим противное, $C_S(N_i) \neq 1$ для любого $i = 1, \dots, t$. Так как S имеет единственную минимальную подгруппу, мы видим, что

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} C_S(N_i) \neq 1.$$

Но тогда $D \subseteq C_G(N) = N$. Получили противоречие.

Следовательно, найдется такая N_i, что S действует на N_i точно и неприводимо. Тогда подгруппа N_iS согласно [13; теорема B.12.4] изоморфна единственно определенной группе $E(q^k \mid p)$. Из $N_iS < G$ следует, что $N_iS \in \mathfrak{F}$.

Согласно лемме 2 найдется q-группа Q, экспонента которой не меньше q^n, но в группе Q имеется по крайней мере две максимальные подгруппы Q_1 и Q_2, экспоненты меньшей q^n.

Рассмотрим регулярное сплетение $T = N \wr Q$. Тогда $T = D \rtimes Q$, где

$$D = N \times \dots \times N \simeq C_p \times \dots \times C_p$$

– база сплетения T. Ввиду $C_{q^n} \leqslant Q$ по [13; теорема A.18.9] группа G вкладывается в качестве подгруппы в T. Рассмотрим нормальные подгруппы

$$T_1 = DQ_1, \qquad T_2 = DQ_2$$

группы T. Из максимальности Q_i в Q следует, что T_i является максимальной подгруппой в T, $i = 1, 2$. Покажем, что $T_i \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $T_1 \notin \mathfrak{F}$. Пусть F – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа такая, что $F \leqslant T_1$. Из Z-насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому F является ненильпотентной p-замкнутой группой, т.е. $F = F_p \leftthreetimes F_q$, где F_p— силовская p-подгруппа, а F_q – силовская q-подгруппа F. Рассмотрим группу $F^* = F/\Phi(F)$. Согласно (3) леммы 1 группа F^* также является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Рассуждая как и выше, можно показать, что

$$F^* \simeq E(q^k \mid p), \qquad \text{где} \quad k \geqslant n.$$

Отсюда следует, что экспонента F_q не меньше чем q^n. Но это противоречит тому, что $F_q \subseteq Q_1$ и подгруппа Q_1 имеет экспоненту меньше чем q^n. Поэтому наше предположение неверно и $T_1 \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что $T_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть T_3 – некоторая максимальная подгруппа группы T, содержащая подгруппу Q. Покажем, что $T_3 \in \mathfrak{F}$. Предположим противное. Если $T_3 = Q$, то из Z-насыщенности $\mathfrak{F}$ следует $T_3 \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $T_3 = PQ$, где P – элементарная абелева нормальная p-подгруппа, $P \subseteq D$, а Q – силовская q-подгруппа $T_3 = PQ$. Из $T_3 \notin \mathfrak{F}$ и Z-насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что найдется главный фактор H/K группы T_3 такой, что

$$\overline{T} = (H/K) \rtimes (T_3/C_{T_3}(H/K)) \notin \mathfrak{F}.$$

Если H/K – q-группа, то

$$(H/K) \rtimes (T_3/C_{T_3}(H/K)) \simeq C_q \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, H/K – p-группа. Заметим, что

$$T_3/C_{T_3}(H/K) \simeq Q/C_Q(H/K) \in \mathfrak{F}$$

– максимальная подгруппа $\overline{T}$. Если $Q = Q_iC_Q(H/K)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, то $Q/C_Q(H/K) \simeq C_{q^t}$, где $t < n$. Значит, $\overline{T} \simeq E(q^t \,|\, p)$ по теореме [13; теорема B.12.4]. Из $t < n$ следует, что $\overline{T} \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $C_Q(H/K) \leqslant Q_1 \cap Q_2$. Поэтому

$$(H/K) \rtimes (Q_iC_{T_3}(H/K)/C_{T_3}(H/K)) \simeq (H/K) \rtimes (Q_i/C_Q(H/K))$$

– различные максимальные подгруппы $\overline{T}$. По аналогии с доказательством того, что $T_1 \in \mathfrak{F}$, доказывается, что $Q_i \in \mathfrak{F}$ для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, в разрешимой группе $\overline{T}$ имеется три попарно несопряженные максимальные подгруппы. Так как формация $\mathfrak{F}$ является $\mathcal{B}$-формацией, $\overline{T} \in \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $T_3 \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, в разрешимой группе T имеется три попарно несопряженные максимальные подгруппы T_1, T_2, T_3, принадлежащие $\mathcal{B}$-формации $\mathfrak{F}$. Значит, $T \in \mathfrak{F}$. Ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$ и вложения G в качестве подгруппы в группу T имеем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G.

Следовательно, остается случай, когда M является циклической подгруппой порядка q. Значит, любая ненильпотентная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с $\Phi(G) = 1$ является группой Шмидта. Тогда ввиду Z-насыщенности $\mathfrak{F}$ по (4) леммы 1 любая ненильпотентная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа также является группой Шмидта. Утверждение (3) доказано.

Установим, что из (3) следует (4). Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная формация, у которой каждая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Ввиду результата Скибы из [15] $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Тогда по [16; теорема 2] (см. также [10; теорема 24.3]) $\mathfrak{F}$ имеет следующее полное локальное задание f:

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ f(p) = \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Утверждение (4) доказано.

Доказательство того, что из (4) следует (1) получается из [4] (см. также [10; теорема 25.3]). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что любая наследственная насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{X}$ является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{X}$, класс $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ непуст и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Из того, что $\mathfrak{X}$ – наследственная формация, получаем, что G является минимальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-группой. Поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – насыщенные формации, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{N}\mathfrak{A}}$ и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть N – абелева p-группа, где p – некоторое простое число. Из $\Phi(G) = 1$ следует, что найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = NM$. Отсюда и из абелевости N следует, что $N \cap M \lhd G$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа G, $N \cap M = 1$, а значит, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Следовательно, G – примитивная группа. Согласно [17; теорема 1.1.7(3)]

$$N = C_G(N) = F(G).$$

Так как $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $G/N \simeq M \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ не принадлежит $\mathfrak{A}$. Тогда в M найдутся по крайней мере две несопряженные подгруппы H_1 и H_2. Рассмотрим подгруппы

$R_1 = NH_1$ и $R_1 = NH_2$. Нетрудно видеть, что R_i является максимальной подгруппой в G и принадлежит $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ для $i = 1, 2$. Учитывая, что $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ является $\mathcal{B}$-формаций в $\mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, можно считать, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Случай 2. Пусть N – неабелева группа. Тогда N представима в виде прямого произведения изоморфных простых неабелевых групп. Поскольку $G \notin \mathfrak{A}$, то найдется минимальная не $\mathfrak{A}$-подгруппа R группы G. Тогда имеем $|\pi(R)| \leqslant 2$ (см. [18; гл. II, § 7]). Так как N неразрешима, то $|\pi(N)| \geqslant 3$. Значит, найдется $p \in \pi(N)$ такое, что $p \notin \pi(R)$. Согласно работе [19] существует точный $\mathbb{F}_pG$-модуль A и групповое расширение $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$ такое, что в E имеется нормальная p-подгруппа K такая, что K G-изоморфна A, $K \subseteq \Phi(E)$ и $E/K \simeq G$.

Поскольку $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – насыщенная формация, то $E \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим R^* – прообраз подгруппы R при естественном гомоморфизме $\alpha\colon E \to E/K \simeq G$. Так как $R^*/K \simeq R$ и K – p-группа, где $p \notin \pi(R)$, то K – нормальная силовская p-подгруппа в R^*. По теореме Шура–Цассенхауза в R^* найдется подгруппа F такая, что

$$R^* = KF, \qquad (|R^* : K|, |R^* : F|) = 1.$$

Заметим, что $F \simeq R$ и $K \subseteq F(R^*)$. Если $K \subset F(R^*)$, то

$$F(R^*) = F(R^*) \cap R^* = F(R^*) \cap KF = K(F(R^*) \cap F), \qquad F(R^*) \cap F \neq 1.$$

Пусть $q \in \pi(F(R^*) \cap F)$. Ясно, что $q \neq p$. Так как K G-изоморфна A и A – точный KG-модуль, то $C_G(A) = 1$. Тогда для силовской q-подгруппы Q из $F(R^*)$ выполняется

$$Q \subseteq C_{F(R^*)}(K) \subseteq C_{R^*}(K) = 1.$$

Получили противоречие. Следовательно, $F(R^*) = K$ и $R^*/F(R^*) = R^*/K \simeq F \notin \mathfrak{A}$. Поэтому $R^* \notin \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Но с другой стороны, $E \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – наследственная формация. Поэтому $R^* \in \mathfrak{X}$. Очевидно, что R^* разрешима. Поэтому $R^* \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}$. Но выше было доказано, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Поэтому $R^* \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Покажем, что любая насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{X}$ является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{X}$. Предположим, что утверждение неверно и группа G – минимальный контрпример с попарно несопряженными максимальными подгруппами M_1, M_2 и M_3, принадлежащими $\mathfrak{F}$. Заметим, что из нильпотентности коммутанта G' следует, что группа G разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Покажем, что выполнено $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $N \subseteq M_i$ для каждого $i = 1, 2, 3$, то ввиду выбора G имеем $G/N \in \mathfrak{F}$. Предположим $MN_i = G$ для некоторого i. Тогда

$$G/N = M_iN/N \simeq M_i/M_i \cap N \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G.

Так как $\mathfrak{F}$ – формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $\Phi(G) = 1$. Из разрешимости G следует, что N – элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. В этом случае $N = C_G(N) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G такая, что $M \cap N = 1$. Более того, если R – другая максимальная подгруппа в G с $G = NR$, то M и R сопряжены в G.

Не теряя общности рассуждений мы можем считать, что $N \subseteq M_i$ для $i = 1, 2$. Из $N = F(G)$ и нильпотентности коммутанта G' следует, что M – абелева группа. Ввиду [13; теоремы A.13.6] следует, что M – p'-группа. Согласно тождеству Дедекинда

$$M_i = M_i \cap NM = N(M_i \cap M), \qquad i = 1, 2.$$

По условию $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Пусть F – каноническое локальное определение $\mathfrak{F}$, которое существует и единственно по [13; теорема IV.3.7]. Тогда из $M_i = N(M_i \cap M) \in \mathfrak{F}$ и $O_{p',p}(M_i) = N$ следует, что $M_i \cap M \in F(p)$, для $i = 1, 2$. Заметим, что $M_1 \cap M$ и $M_2 \cap M$ – несопряженные максимальные подгруппы в M. По теореме Оре

$$M = (M_1 \cap M)(M_2 \cap M).$$

Теперь из абелевости M и $M_i \cap M \in F(p)$, $i = 1, 2$, получаем, $M \in F(p)$. Откуда из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/O_{p',p}(G) = G/N \simeq M \in F(p)$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. Нерешенные проблемы. 1) Условие насыщенности формации $\mathfrak{F}$ в теореме 2 нельзя заменить на Z-насыщенность.

Пусть $\mathfrak{X} = (C_2, C_3, C_7, E(2\,|\,7), E(3\,|\,7))$. Рассмотрим класс групп $\mathfrak{F}$, у которых все главные факторы $\mathfrak{X}$-центральны. Очевидно, что $\mathfrak{X}$ состоит из разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ – формация согласно [13; теорема IV.2.15]. Заметим, что $E(i\,|\,7)$ имеет нормальную циклическую 7-подгруппу C_7 и

$$C_7 \rtimes (E(i\,|\,7)/C_{E(i\,|\,7)}(C_7)) \simeq E(i\,|\,7)$$

по теореме [13; теорема B.12.4] для $i \in \{2, 3\}$. То есть всякий $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор является $\mathfrak{X}$-центральным. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – Z-насыщенная формация.

Так как все группы из $\mathfrak{X}$ сверхразрешимы, мы видим, что и все группы из $\mathfrak{F}$ сверхразрешимы. Пусть $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd \dots \lhd N_k = G$ – главный ряд $\mathfrak{F}$-группы G, $H \leqslant G$ и $H_i = N_i \cap H$. Заметим, что

$$|N_i : H_i| = |N_i : H_{i+1} \cap N_i| = |N_i H_{i+1} : H_{i+1}|$$

– делитель $|N_{i+1} : H_{i+1}|$. Тогда $|H_{i+1} : H_i|$ делит $|N_{i+1} : N_i|$ – простое число. То есть после удаления повторяющихся членов из ряда

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \dots \lhd H_k = G$$

мы получим главный ряд H. С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$H \cap C_G(N_{i+1}/N_i) = C_H(N_{i+1}/N_i) \leqslant C_H(H_{i+1}/H_i).$$

То есть $H/C_H(H_{i+1}/H_i) \in (1, C_2, C_3)$, причем, последние два случая возможны только если H_{i+1}/H_i – 7-группа. Тогда

$$(H_{i+1}/H_i) \rtimes (H/C_H(H_{i+1}/H_i)) \in (E(2\,|\,7), E(3\,|\,7))$$

в силу однозначной определимости групп $E(2\,|\,7)$ и $E(3\,|\,7)$. Итак, $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – наследственная Z-насыщенная формация сверхразрешимых групп, в частности, все $\mathfrak{F}$-группы имеют нильпотентный коммутант.

Заметим, что группа $E(6\,|\,7) \notin \mathfrak{F}$ имеет максимальные несопряженные $\mathfrak{F}$-подгруппы $E(2\,|\,7)$, $E(3\,|\,7)$ и C_7. Поэтому, $\mathfrak{F}$ не является $\mathcal{B}$-формацией в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Таким образом, условие насыщенности формации нельзя заменить на Z-насыщенность в теореме 2.

2) Как было отмечено выше, в классе всех групп семейства наследственных $\mathcal{B}$-формаций и $\mathcal{K}$-формаций не совпадают. Интересно рассмотреть связь $\mathcal{B}$-формаций с еще одним известным семейством формаций. Напомним [4], [17; с. 268], что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова (кратко, $\breve{S}$-формацией), если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Существуют наследственные $\breve{S}$-формации, которые не являются $\mathcal{B}$-формациями. В качестве примера рассмотрим класс $\mathfrak{D}$ всех дисперсивных по Оре групп. Пусть φ – такое упорядочение простых чисел, что $p\varphi q$ всегда влечет $p > q$. Напомним, что группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ называется дисперсивной по Оре, если $p_1\varphi p_2\varphi\cdots\varphi p_n$ и для любого i группа G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_i}$. Хорошо известно, что $\mathfrak{D}$ образует наследственную насыщенную формацию. Из классического результата Ито об описании групп, у которых каждая подгруппа является p-нильпотентной [18; теорема IV.5.4] следует, что $\mathfrak{D}$ является $\breve{S}$-формацией. С другой стороны, $\mathfrak{D}$ не является $\mathcal{B}$-формацией на что указывает пример неабелевой простой группы Янко J_1, которая является не $\mathfrak{D}$-группой, но в J_1 имеется по крайней мере три попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие формации $\mathfrak{D}$ ($19:6$ – нормализатор силовской 19-подгруппы, $11:10$ – нормализатор силовской 11-подгруппы, $7:6$ – нормализатор силовской 7-подгруппы, см. например, [20]).

Проблема 2. Верно, что любая наследственная Z-насыщенная (насыщенная) $\mathcal{B}$-формация является $\breve{S}$-формацией ($\mathcal{K}$-формацией)?

Обозначим через Ω семейство всех наследственных Z-насыщенных формаций, которые одновременно являются $\breve{S}$-, $\mathcal{K}$- и $\mathcal{B}$-формациями. Из результатов Шмидта, Белоногова и Кегеля следует, что $\mathfrak{N} \in \Omega$. Возникает следующая естественная

Проблема 3. Конструктивно описать (насыщенные) формации из Ω.

3) Пусть $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Следуя Скибе [21], группа называется *σ-нильпотентной*, если она является прямым произведением ее холловых π_i-подгрупп для $\pi_i \in \sigma$. Класс всех σ-нильпотентных групп (обозначается через $\mathfrak{N}_\sigma$) является наследственной насыщенной формацией. Отметим, что классы всех нильпотентных и всех π-разложимых групп совпадают с $\mathfrak{N}_\sigma$ для $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ соответственно. Класс всех σ-нильпотентных групп в настоящее время интенсивно изучается различными авторами.

В работе [22] (см. также [21; теорема 6.4.14]) Баллестер-Болиншес и Перец-Рамос было получено, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ является наследственной насыщенной $\breve{S}$-формацией. В работе [23] Казарин, Мартинец-Пастор и Перец-Рамос установили, что класс всех π-разложимых групп является $\mathcal{K}$-формацией. Из их результата несложно получить, что $\mathfrak{N}_\sigma$ является $\mathcal{K}$-формацией для любого разбиения σ.

Проблема 4. Пусть σ – разбиение множества $\mathbb{P}$. Верно ли, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ является $\mathcal{B}$-формацией?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. А. Белоногов, "Конечные группы с единственным классом ненильпотентных максимальных подгрупп", *Сиб. матем. журн.*, **5**:5 (1964), 987–995.

[2] В. А. Белоногов, "Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп", *Докл. АН СССР*, **161**:6 (1965), 1255–1256.

[3] В. Н. Семенчук, "Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-групп", *Подгрупповое строение конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1981, 138–148.

[4] А. Ф. Васильев, "К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством", *Вопросы алгебры*, 1987, № 3, 3–11.

[5] А. Ф. Васильев, "О перечислении локальных формаций с условием Кегеля", *Вопросы алгебры*, 1993, № 7, 86–93.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, "On formations with the Kegel property", *J. Group Theory*, **5** (2005), 605–611.

[7] O. H. Kegel, "Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen", *Math. Z.*, **87**:1 (1965), 42–48.

[8] L. S. Kazarin, "On groups which are the product of two solvable subgroups", *Comm. Algebra*, **14**:6 (1986), 1001–1066.

[9] Л. С. Казарин, "Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами", *Укр. матем. журн.*, **43**:7-8 (1991), 947–950.

[10] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.

[11] L. A. Shemetkov, "Frattini extensions of finite groups and formations", *Comm. Algebra*, **23**:3 (1997), 955–964.

[12] A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos, "On a question of L. A. Shemetkov", *Comm. Algebra*, **27**:11 (1999), 5615–5618.

[13] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, De Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[14] А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, "Формации и произведения $\mathrm{F}(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп", *Матем. заметки*, **107**:3 (2020), 376–390.

[15] А. Н. Скиба, "Об одном классе локальных формаций конечных групп", *Докл. АН БССР*, **34**:11 (1990), 982–984.

[16] В. Н. Семенчук, А. Ф. Васильев, "Характеризация локальных формаций F по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп", *Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Труды Гомельского семинара*, Наука и техника, Минск, 1984, 175–181.

[17] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Springer, Dordrecht, 2006.

[18] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[19] R. L. Griess, P. Schmid, "The Frattini module", *Arch. Math.* (*Basel*), **30**:3 (1978), 256–266.

[20] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson,, $\mathbb{ATLAS}$ *of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[21] A. N. Skiba, "On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups", *J. Algebra*, **436** (2015), 1–16.

[22] A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos, "On $\mathfrak{F}$-critical groups", *J. Algebra*, **147**:3 (1995), 948–958.

[23] L. S. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos, “Finite trifactorsed groups and π-decomposability”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **97**:2 (2018), 218–228.

А. Ф. Васильев
Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: formation56@mail.ru

В. И. Мурашко
Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: mvimath@yandex.ru

А. К. Фурс
Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: andreyfurss@gmail.com

Поступило
18.10.2021
После доработки
30.11.2021
Принято к публикации
03.12.2021