А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, Формации и произведения $\mathrm{F}(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп, *Матем. заметки*, 2020, том 107, выпуск 3, 376–390

DOI: 10.4213/mzm12190

Математические заметки

Том 107 выпуск 3 март 2020

УДК 512.542

Формации и произведения $\mathrm{F}(G)$-субнормальных подгрупп конечных разрешимых групп

А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Подгруппа H конечной группы G называется $\mathrm{F}(G)$-*субнормальной*, если она субнормальна в $H\mathrm{F}(G)$, где $\mathrm{F}(G)$ – подгруппа Фиттинга G. В работе исследуется проблема принадлежности формации $\mathfrak{F}$ произведений $\mathrm{F}(G)$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп конечных разрешимых групп. В частности, описаны разрешимые насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с таким свойством. Изучаются формационные свойства групп, имеющие три разрешимые $\mathrm{F}(G)$-субнормальные подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. Установлена сверхразрешимость группы G, имеющей три сверхразрешимые $\mathrm{F}(G)$-субнормальные подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа, подгруппа Фиттинга, насыщенная формация, формация Фиттинга.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12190

1. Постановка задачи. Рассматриваются только конечные группы. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация. Изучение условий, при которых $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, является предметом исследований многочисленных работ по теории групп. В работе [1] Амберг, Казарин, Хёфлинг нашли наследственные формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведений произвольных (необязательно разрешимых) $\mathfrak{F}$-подгрупп. В работах [2], [3] в классе разрешимых групп было получено конструктивное описание нормально наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу $G = AB$, где A и B – абнормальные (контранормальные, т.е. $A^G = G = B^G$) $\mathfrak{F}$-подгруппы в G. Сложной и содержательной в этом направлении является задача описания радикальных формаций (формаций Фиттинга), т.е. нормально наследственных формаций $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно взятия произведений нормальных (субнормальных) $\mathfrak{F}$-подгрупп. Отправной точкой исследований радикальных формаций является работа Фиттинга [4] 1938 года, в которой была доказана нильпотентность группы, являющейся произведением своих нормальных нильпотентных подгрупп. В 1972 году Брайс и Косси [5] получили конструктивное описание всех наследственных радикальных формаций разрешимых групп. В дальнейшем, различными авторами были получены содержательные результаты о радикальных формациях, которые нашли отражение в монографиях [6]–[8].

В последние годы активно проводятся исследования формаций, замкнутых относительно произведений обобщенно субнормальных подгрупп. Формации, замкнутые относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, изучались в работах [9]–[11] и др.

Из отмеченного выше результата Фиттинга следует, что во всякой группе существует единственная максимальная нормальная нильпотентная подгруппа $\mathrm{F}(G)$, называемая подгруппой Фиттинга. Данная подгруппа оказывает большое влияние на строение разрешимой группы. В связи с этим в работе [12] авторами данной работы было введено следующее определение.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется $\mathrm{F}(G)$-*субнормальной*, если H субнормальна в $H\mathrm{F}(G)$.

Очевидно, что всякая субнормальная подгруппа является $\mathrm{F}(G)$-субнормальной. Обратное утверждение неверно.

Пример 1. Пусть $G \simeq S_4$ – симметрическая группа степени 4 и H – силовская 2-подгруппа G. Тогда H – максимальная подгруппа G и H не субнормальна в G. Заметим, что $\mathrm{F}(G) \subseteq H$. Таким образом, H – несубнормальная $\mathrm{F}(G)$-субнормальная подгруппа G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ будем называть $\mathrm{F}(G)$-*радикальным в* $\mathfrak{X}$, если выполняются следующие условия:

(1) $\mathfrak{F}$ является нормально наследственным классом групп;

(2) $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G.

Возникает следующая общая проблема.

Проблема 1. *Для заданного класса разрешимых групп* $\mathfrak{X}$ *описать формации групп* $\mathfrak{F}$, *которые* $\mathrm{F}(G)$-*радикальны в* $\mathfrak{X}$.

Рассмотрению ряда случаев этой проблемы посвящены теоремы A и B данной работы.

Напомним [13; раздел 12.7], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$; в противном случае он называется $\mathfrak{F}$-*эксцентральным*. $\mathfrak{F}$-*гиперцентром* группы G называется наибольшая нормальная подгруппа G, все G-главные факторы ниже которой $\mathfrak{F}$-центральны в G, и обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. В работах [14], [15] изучались формации $\mathfrak{F}$, совпадающие с классом всех групп, у которых каждый главный фактор является $\mathfrak{F}$-центральным, что, кратко, означает $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$. Класс таких формаций достаточно широк, в частности, он включает все насыщенные формации, однако далеко не исчерпывается ими.

Следующая теорема дает конструктивное описание насыщенных $\mathrm{F}(G)$-радикальных в $\mathfrak{S}$ формаций разрешимых групп, обладающих отмеченным свойством.

Теорема A. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация разрешимых групп и* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Формация* $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$ *является* $\mathrm{F}(G)$-*радикальной формацией в* $\mathfrak{S}$.

(2) *Насыщенная формация* $\mathfrak{F}$ *содержит всякую разрешимую группу* $G = AB$, *где* A *и* B – $\mathrm{F}(G)$-*субнормальные* $\mathfrak{F}$-*подгруппы* G.

(3) *Существует такое разбиение* $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ *множества простых чисел* π *на попарно непересекающиеся подмножества, что* $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

Следствие A.1 [12]. *Если группа* $G = AB$ – *произведение нильпотентных* $\mathrm{F}(G)$-*субнормальных подгрупп* A *и* B, *то* G *нильпотентна.*

Следствие A.2. *Пусть группа* $G = AB$ – *произведение нильпотентных подгрупп* A *и* B. *Если* $\mathrm{F}(G) \leqslant A \cap B$, *то* G *нильпотентна.*

Следствие A.3. *Пусть* π – *множество простых чисел и разрешимая группа* $G = AB$ – *произведение* π-*разложимых* $\mathrm{F}(G)$-*субнормальных подгрупп. Тогда* G π-*разложима.*

Замечание. Как следует из (3) теоремы A, семейство всех насыщенных $\mathrm{F}(G)$-радикальных формаций в точности совпадает с семейством всех разрешимых насыщенных наследственных решеточных формаций. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если пересечение и порождение $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе G всегда является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой G. Решеточные формации играют важную роль в современных исследованиях по теории групп, см., например, [8] и [16].

Имеются примеры несверхразрешимых групп, являющихся произведением нормальных (субнормальных) сверхразрешимых подгрупп (см., например, [17; с. 8]). С другой стороны, Бэр в [18] показал, что если группа G является произведением своих двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. В работе [19] результат Бэра был расширен для наследственных насыщенных формаций в классе всех групп с нильпотентным коммутантом.

Теорема B. *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Любая наследственная насыщенная подформация* $\mathfrak{F}$ *из* $\mathfrak{X}$ *является* $\mathrm{F}(G)$-*радикальной в* $\mathfrak{X}$.

(2) *Всякая группа из* $\mathfrak{X}$ *имеет нильпотентный коммутант.*

Следствие B.1 [12]. *Пусть группа* $G = AB$ – *произведение сверхразрешимых* $\mathrm{F}(G)$-*субнормальных подгрупп* A *и* B. *Если* G *имеет нильпотентный коммутант, то* G *сверхразрешима.*

Следствие B.2 [12]. *Пусть группа* $G = AB$ – *произведение сверхразрешимых подгрупп* A *и* B. *Если* G *имеет нильпотентный коммутант и* $\mathrm{F}(G) \leqslant A \cap B$, *то* G *сверхразрешима.*

Известно, что если группа G содержит две подгруппы A и B, имеющие взаимно простые индексы в G, то $G = AB$. Фрисен [20] установил, что если группа G является произведением двух своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в G, то G сверхразрешима.

В работах [12] и [21] были рассмотрены примеры разрешимых и неразрешимых групп, показывающие, что в теореме Фрисена условие нормальности (субнормальности) подгрупп нельзя заменить на их $\mathrm{F}(G)$-субнормальность, а также исследованы дополнительные условия при которых произведения $\mathrm{F}(G)$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп сверхразрешимы.

С другой стороны, по теореме Дёрка [22] группа сверхразрешима, если она содержит четыре сверхразрешимые подгруппы, имеющие попарно взаимно простые индексы в ней. Этот результат был обобщен в [23] на случай произвольной насыщенной формации метанильпотентных групп.

Проблема 2. *Описать (насыщенные) формации* $\mathfrak{F}$, *содержащие всякую группу* G, *имеющую три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы попарно взаимно простых индексов в ней.*

Отметим, что по известной теореме Виландта [6; теорема 4.11], если группа G имеет три разрешимые подгруппы, индексы в G которых попарно взаимно просты, то G разрешима.

Теорема C. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация метанильпотентных групп. Тогда* $\mathfrak{F}$ *содержит всякую группу* G, *имеющую три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в* G.

Следствие C.1. *Пусть группа* G *содержит три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные подгруппы с нильпотентным коммутантом, имеющие попарно взаимно простые индексы в* G. *Тогда коммутант* G *нильпотентен.*

Следствие C.2. *Пусть группа* G *содержит три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные метанильпотентные подгруппы, имеющие попарно взаимно простые индексы в* G. *Тогда группа* G *метанильпотентна.*

В недавних работах [24]–[26] исследовались условия сверхразрешимости группы, имеющей три сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в ней. В частности, в [25] установлено, что если такая группа имеет нильпотентный коммутант, то она сверхразрешима. Отметим, что в этих работах рассматривались только индуктивные условия, т.е. условия, сохраняющиеся при переходе к подгруппам и фактор-группам. Нетрудно показать, что свойство $\mathrm{F}(G)$-субнормальности в общем случае не переносится на подгруппы и фактор-группы.

Следствие C.3. *Если группа* G *содержит три* $\mathrm{F}(G)$*-субнормальные сверхразрешимые подгруппы, имеющие попарно взаимно простые индексы в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие C.4. *Пусть группа* G *содержит три сверхразрешимые подгруппы* A, B *и* C, *имеющие попарно взаимно простые индексы в* G. *Если* $\mathrm{F}(G) \leqslant A \cap B \cap C$, *то группа* G *сверхразрешима.*

2. Предварительные результаты. Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [6]–[8]. Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные в данной работе:

- через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел;
- $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G;
- $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$;
- через π' обозначается дополнение множества простых чисел π в $\mathbb{P}$;
- группа G называется π*-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi$;

- Z_p – циклическая группа простого порядка p;
- $\mathrm{O}_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π-подгруппа G;
- $\mathrm{F}_p(G)$ – p-нильпотентный радикал G для $p \in \mathbb{P}$;
- $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G;
- $\mathrm{Soc}(G)$ – цоколь G, т.е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G;
- $A \operatorname{wr} B$ – регулярное сплетение групп A и B;
- $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп M и N ($N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$);
- $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп;
- $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;
- $\mathfrak{S}_\pi$ – это класс всех разрешимых π-групп, $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп, где $\pi \subseteq \mathbb{P}$;
- $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_\pi$ для $\pi = \{p\}$.

Лемма 2.1 [7; теорема A.10.6]. *Пусть G – группа. Тогда*

$$\mathrm{F}(G/\Phi(G)) = \mathrm{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$$

и $C_G(\mathrm{F}(G)) \subseteq \mathrm{F}(G)$.

Нам потребуется следующий хорошо известный результат.

Лемма 2.2. *Пусть G – группа. Тогда*

$$\mathrm{F}_p(G)/\mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_p(G/\mathrm{O}_{p'}(G)).$$

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется (*нормально*) *наследственным*, если из условий $G \in \mathfrak{X}$ и $(H \trianglelefteq G)H \leqslant G$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ – разбиение $\pi \subseteq \mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества. Тогда

$$\bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} = \left(G = \bigtimes_{i\in I} \mathrm{O}_{\pi_i}(G) \;\middle|\; \mathrm{O}_{\pi_i}(G) \in \mathfrak{S}_{\pi_i}\right)$$

– наследственная насыщенная формация [16; лемма 3.1.13].

Пусть $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{K}$ – формации. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{K} = \varnothing$, то положим $\mathfrak{F}\mathfrak{K} = \varnothing$. Если $\mathfrak{K} \neq \varnothing$, то обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ класс всех тех групп G, для которых $G^{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{F}$. Известно [6; теорема 1.1], что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ является формацией.

Всякая функция $f\colon \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном.* Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует такой локальный экран f, что

$$\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(p) \quad \text{для любого главного фактора } H/K \text{ и } p \in \pi(H/K)).$$

Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. По известной теореме Гашюца–Любезедер–Шмида непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна.

По [6; теорема 3.3] всякая локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный локальный экран F такой, что $F(p) = \mathfrak{N}_p F(p)$ и $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Такой локальный экран называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 2.3 [6; лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Группа G называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если $G \notin \mathfrak{F}$, но всякая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп обозначается $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$. *Группой Шмидта* называется минимальная ненильпотентная группа. Нам понадобятся некоторые свойства строения групп Шмидта, которые вытекают из [6; теоремы 26.1 и 26.2].

Лемма 2.4. *Пусть G – группа Шмидта. Тогда*
(1) *$G = P \rtimes Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа G, а Q – циклическая силовская q-подгруппа G, не являющаяся нормальной в G;*
(2) *$G/\Phi(G)$ также является группой Шмидта;*
(3) *$P\Phi(G)/\Phi(G)$ – элементарная абелева p-группа, а $|Q\Phi(G)/\Phi(G)| = q$.*

(p, q)-группой Шмидта называется группа Шмидта G, для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией с условием Шеметкова ($\check{S}$-формацией)* в классе $\mathfrak{X}$ [13; § 24], если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа из $\mathfrak{X}$ является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую разрешимую π-группу $G = AB$, где A – нильпотентная нормальная подгруппа G, а B – субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа G.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка. Тогда π-группа $G = AB$, где A – нильпотентная нормальная подгруппа G, а B – субнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа G и $G \notin \mathfrak{F}$. Очевидно, что $B \neq 1$ и $A \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Тогда для G/N все условия леммы выполняются. Ввиду выбора G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если в G найдутся две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то из $G/N_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. По лемме 2.1 $N = \mathrm{F}(G) = A$.

Заметим, что $\mathrm{F}(B) \neq 1$. Так как B субнормальна в G, то $\mathrm{F}(B) \leqslant \mathrm{F}(G) = A$. Поэтому $A \cap B \neq 1$. Так как $A \trianglelefteq G$, то $A \cap B \trianglelefteq B$. Так как A абелева, то $A \cap B \trianglelefteq A$. Из $G = AB$ следует, что $A \cap B \trianglelefteq G$. Так как A – минимальная нормальная подгруппа G, то $A = A \cap B$. Откуда $G = B \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

Лемма 2.6 [27]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

3. Доказательство теоремы A. Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть формация $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$ и $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$. Тогда*
(1) *если $\Phi(G) = 1$, то $G = N \rtimes M$, где $M \in \mathfrak{F}$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа G;*

(2) *если G нильпотентна, то $G \simeq Z_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$;*
(3) $\Phi(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$, *в частности,* $G/\Phi(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$;
(4) *если $G/\Phi(G)$ – группа Шмидта, то и G – группа Шмидта.*

Доказательство. (1) Данное утверждение хорошо известно и следует из того, что в разрешимой группе G с $\Phi(G) = 1$ всякая минимальная нормальная подгруппа дополняема и $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$.

(2) Пусть G нильпотентна и $G \not\simeq Z_q$ для любого $q \in \mathbb{P}$. Тогда $Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi(G)$. Значит, все главные факторы G $\mathfrak{F}$-центральны. Итак, $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

(3) Пусть H/K – главный фактор G ниже $\Phi(G)$. Тогда $\Phi(G) < \mathrm{F}(G) \leqslant C_G(H/K)$ по лемме 2.1. Пусть M – максимальная подгруппа G такая, что $M\mathrm{F}(G) = G$. Тогда

$$MC_G(H/K) = G, \qquad M \cap C_G(H/K) = C_M(H/K).$$

Из $M \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \simeq H/K \rtimes M/C_M(H/K) \in \mathfrak{F}$$

по теореме Барнса–Кегеля [8; следствие 2.2.5]. Следовательно, H/K – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор G. Итак, $\Phi(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

Так как $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$, имеем $G/\Phi(G) \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $G/\Phi(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. По (1) в этой группе имеется единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $\mathfrak{F}$-корадикалом, т.е. являющаяся $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором. Поэтому $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \leqslant \Phi(G)$. Итак, $\Phi(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

(4) Предположим, что $G/\Phi(G)$ – (p, q)-группа Шмидта. Согласно пункту (3) имеем $G/\Phi(G) \in \mathscr{M}(\mathfrak{F})$. Так как группа Шмидта – это минимальная ненильпотентная группа, то нам достаточно показать, что $\Phi(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\infty}(G)$.

Пусть P и Q – силовские p-подгруппа и q-подгруппа $\Phi(G)$ соответственно. Предположим, что H/K – эксцентральный главный фактор G ниже P. Тогда выполнено $G/C_G(H/K) \simeq Z_q$. Согласно [28; лемма 2] все (p, q)-группы Шмидта H с $\Phi(H) = 1$ изоморфны. Из этого и (3) следует, что

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \simeq G/\Phi(G) \in \mathfrak{F};$$

противоречие. Значит, $P \leqslant \mathrm{Z}_{\infty}(G)$.

Предположим, что H/K – эксцентральный главный фактор G ниже Q. Пусть N – силовская p-подгруппа G. Тогда $QN/N \leqslant \Phi(G/N)$ и $(G/N)/(QN/N) \simeq Z_q$. Значит, G/N – циклическая q-группа. Следовательно, $Q \leqslant \mathrm{Z}(G)$. Итак, $\Phi(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\infty}(G)$.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$ – формация разрешимых групп, содержащая всякую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G. Предположим также, что $\mathfrak{F}$ насыщена или нормально наследствена. Тогда*

(1) *$\mathfrak{F}$ – $\breve{S}$-формация в $\mathfrak{S}$;*
(2) *существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{F})$ на попарно непересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{F}$ содержит (p, q)-группу Шмидта тогда и только тогда, когда $\{p, q\} \subseteq \pi_i$ для некоторого $i \in I$;*

(3) $\mathfrak{F} = \times_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

Доказательство. (1) В силу (2) и (4) леммы 3.1 достаточно показать, что $G/\Phi(G)$ – группа Шмидта для любой $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$ с $|\pi(G)| > 1$. Поэтому далее считаем, что $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}$ и $\Phi(G) = 1$. Согласно пункту (1) леммы 3.1 $G = N \rtimes M$, где $M \in \mathfrak{F}$ и $N = \mathrm{F}(G) = C_G(N)$, причем N – абелева p-группа для некоторого $p \in \mathbb{P}$.

Предположим, что M не является циклической примарной группой. Тогда найдутся собственные подгруппы M_1 и M_2 группы M такие, что $M_1M_2 = M$. Так как $M_1\mathrm{F}(G) < G$ и $M_2\mathrm{F}(G) < G$, то $M_1\mathrm{F}(G)$ и $M_2\mathrm{F}(G)$ – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G. По условию $G = (M_1\mathrm{F}(G))(M_2\mathrm{F}(G)) \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Значит, M – циклическая примарная группа. Пусть $|M| = q^n$.

Предположим, что $n > 1$. Пусть $Z_q \simeq R < G$. Тогда N представима в прямое произведение минимальных R-допустимых подгрупп по теореме Машке [7; теорема A.10.14]. Так как $C_G(N) = N$, среди указанных подгрупп найдется подгруппа N_1 на которой R не действует тождественно. Тогда $N_1R \in \mathfrak{F}$ – (p,q)-подгруппа Шмидта.

Пусть Q – подгруппа индекса q в G. Ясно, что $Z_p, Z_q, Q \in \mathfrak{F}$ и $Q \trianglelefteq G$. Рассмотрим

$$C = Q \,\mathrm{wr}\, R = D \rtimes R, \qquad \text{где} \qquad D \in \mathfrak{F} \text{ – база сплетения } C.$$

Так как D – прямое произведение групп изоморфных Q и $\mathrm{O}_q(Q) = 1$, $\mathrm{O}_q(C) \cap D = 1$, то из $C \not\simeq D \times Z_q$ следует, что $\mathrm{O}_q(C) = 1$ и $\mathrm{F}(C) = \mathrm{O}_p(C) = \mathrm{O}_p(D)$.

Пусть $E = \mathrm{O}_p(D)R$ и H/K – главный фактор E. Тогда $H/K \rtimes E/C_E(H/K)$ изоморфна одной из следующих групп: Z_p, Z_q и (p,q)-группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. По доказанному ранее все эти группы принадлежат $\mathfrak{F}$. Следовательно, $E \in \mathfrak{F}$. Итак, разрешимая группа $C = DE$ – произведение $\mathrm{F}(C)$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Значит, $C \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что класс всех метанильпотентных групп – насыщенная формация Фиттинга. По условию $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – насыщенная формация или формация Фиттинга. Согласно [7; теоремы IV.3.18 и XI.1.8] в обоих случаях $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ – наследственная формация. Отметим, что $C \in \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{F}$. По [7; теорема A.18.9] группа G изоморфна некоторой подгруппе группы C. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$; противоречие. Итак, $n = 1$ и G – группа Шмидта.

(2) Пусть $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$. Скажем, что $p \sim q$, если $p = q$ или $\mathfrak{F}$ содержит (p,q)-группу Шмидта. Если мы докажем, что $\sim$ является отношением эквивалентности, то в качестве π_i можно будет взять i-й класс эквивалентности относительно $\sim$. Очевидно, что $\sim$ рефлексивно.

Пусть $\{p,q,r\} \subseteq \mathbb{P}$ и $r \neq p \neq q$. По [7; теорема B.10.3] существует точный неприводимый Z_q-модуль V над полем $\mathbb{F}_p$. Пусть $T = V \rtimes Z_q$. Аналогично по [7; теорема B.10.3] существует точный неприводимый T-модуль R над полем $\mathbb{F}_r$. Пусть $N(r,p,q) = R \rtimes T$. Заметим, что $\mathrm{F}(N(r,p,q)) = R$.

Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщена или нормально наследствена, то $Z_t \in \mathfrak{F}$ для любого $t \in \pi(\mathfrak{F})$.

Докажем симметричность $\sim$. Предположим, что (q,p)-группа Шмидта принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть $N = N(q,p,q)$, $L \in \{RZ_q, RV\}$ и H/K – главный фактор L. Тогда $H/K \rtimes L/C_L(H/K)$ может быть изоморфна одной из следующих групп: Z_q, Z_p и

(q,p)-группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини. Так как указанные группы принадлежат $\mathfrak{F}$, то $L \in \mathfrak{F}$. Из $\mathrm{F}(N) = R$ и $N = (RZ_q)(RV)$ следует, что $N \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $N/R \in \mathfrak{F}$ – (p,q)-группа Шмидта.

Теперь докажем транзитивность $\sim$. Предположим, что (p,r)-группа и (r,q)-группа Шмидта принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда и (r,p)-группа Шмидта принадлежит $\mathfrak{F}$ в силу симметричности $\sim$. По аналогии доказывается, что $N(r,p,q) \in \mathfrak{F}$ и $N(r,p,q)/R \in \mathfrak{F}$ – (p,q)-группа Шмидта.

(3) Заметим, что в силу леммы 3.1 и пункта (2) для любого $\pi_i \in \sigma$ у $\mathfrak{F}$ не имеется разрешимой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G с $\pi(G) \subseteq \pi_i \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\pi_i \in \sigma$. Следовательно, $\bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Так как $\bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ – насыщенная формация, $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = C_G(N)$, $G/N \in \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ и N – p-группа. Не теряя общности рассуждения можно считать, что $p \in \pi_1$. Тогда $\pi(G) \not\subseteq \pi_1$.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ нормальна наследствена. Пусть H – холлова π_1'-подгруппа G. Тогда в H найдется субнормальная подгруппа простого порядка R. Заметим, что $HN/N \trianglelefteq G/N$. Тогда $NR \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Значит, $NR \in \mathfrak{F}$. Отметим, что одной из фактор групп NR является группа Шмидта, что противоречит (2).

Предположим, что $\mathfrak{F}$ насыщена. Пусть f – локальный экран $\mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in f(p) \cap \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Заметим, что Z_q для некоторого $q \in \pi_1'$ принадлежит $f(p)$ как фактор группа группы G/N. Следовательно, $\mathfrak{F}$ содержит (p,q)-группу Шмидта, что противоречит (2).

В обоих случаях получаем, что указанной группы G не существует. Значит, $\mathfrak{F} = \bigtimes_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

Перейдем к доказательству теоремы A. Согласно лемме 3.2 из (1) следует (3) и из (2) следует (3). Покажем, что из (3) следуют (1) и (2). Пусть существует такое разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества простых чисел π на непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{F} = \bigtimes_{i\in I} \times \mathfrak{S}_{\pi_i}$. Заметим, что $\mathfrak{F}$ – наследственая насыщенная формация, в частности $\mathfrak{F} = (G \mid \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G)$ и для такой формации $\mathfrak{F}$ утверждения (1) и (2) становятся эквивалентными.

Предположим, что из (3) не следует (1). Пусть разрешимая не $\mathfrak{F}$-группа $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, является контрпримером наименьшего порядка. Так как $\mathrm{F}(G) \trianglelefteq A\mathrm{F}(G)$ и $A \trianglelefteq\trianglelefteq A\mathrm{F}(G)$, то $A\mathrm{F}(G) \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.5. Аналогично, $B\mathrm{F}(G) \in \mathfrak{F}$. Поэтому, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\mathrm{F}(G) \leqslant A \cap B$.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $\mathrm{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{F}(G/\Phi(G))$ по лемме 2.1, то $A/\Phi(G)$ и $B/\Phi(G)$ – $\mathrm{F}(G/\Phi(G))$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы $G/\Phi(G) = (A/\Phi(G))(B/\Phi(G))$, откуда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщена, то $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$ и $\mathrm{F}(G) = \mathrm{Soc}(G)$ – произведение минимальных нормальных подгрупп G.

Пусть A_{π_i} и B_{π_i} – холловы π_i-подгруппы A и B соответственно. Так как $A_{\pi_i} \trianglelefteq A$, то $\mathrm{F}(G) \leqslant N_G(A_{\pi_i})$. Аналогично, $\mathrm{F}(G) \leqslant N_G(B_{\pi_i})$. Пусть A_{π_i} содержится в холловой π_i-подгруппе G_{π_i} группы G. Так как $B_{\pi_i} \trianglelefteq B$, то найдется такой элемент $a \in A$, что $B_{\pi_i}^a$ содержится в G_{π_i}. Заметим также, что $G = AB^a$ и $\mathrm{F}(G) \leqslant N_G(B_{\pi_i}^a)$. Так как $|B^a_{\pi_i} \cap A_{\pi_i}|$ делит $|A \cap B^a|$, то $|B^a_{\pi_i} A_{\pi_i}| = |G_{\pi_i}|$. Следовательно, $B^a_{\pi_i} A_{\pi_i} = G_{\pi_i}$, откуда $\mathrm{F}(G) \leqslant N_G(G_{\pi_i})$.

Поэтому $\mathrm{F}(G)$ лежит в пересечении нормализаторов всех холловых π_i-подгрупп группы G для заданного $i \in I$. В силу произвольности выбора π_i, $\mathrm{F}(G)$ лежит в пересечении нормализаторов всех холловых π_i-подгрупп группы G для любого $i \in I$.

Пусть $p \in \pi_i \in \sigma$ и N – минимальная нормальная p-подгруппа G. Рассмотрим холлову π_j-подгруппу H группы G, где $i \neq j$. Так как имеем $N \leqslant \mathrm{Soc}(G) \leqslant N_G(H)$ и $N \cap H = 1$, то $H \leqslant C_G(N)$. В силу произвольности выбора H, $C_G(N)$ содержит все элементы, чьи порядки взаимно просты с простыми числами из π_i. Это означает, что $\pi(N \rtimes G/C_G(N)) \subseteq \pi_i$. То есть $N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$. Значит, $N \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

Следовательно, $\mathrm{F}(G) = \mathrm{Soc}(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Согласно [7; теорема IV.6.10] выполнено $C_G(G^{\mathfrak{F}}) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $C_G(\mathrm{F}(G)) \leqslant \mathrm{F}(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} \leqslant \mathrm{F}(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$, заключительное противоречие. Следовательно, из (3) следуют (1) и (2), теорема доказана.

4. Доказательство теоремы B. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Предположим, что любая насыщенная наследственная подформация $\mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{X}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G. Пусть $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{NA}$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NA}$.

Так как класс $\mathfrak{NA}$ всех групп с нильпотентным коммутантом является наследственной насыщенной формацией, то ввиду выбора G, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $\Phi(G) = 1$. Так как $\mathfrak{X}$ – наследственная формация, то G – минимальная не $\mathfrak{NA}$-группа.

Согласно [6; гл. I, § 4, раздел 10] выполнено $\mathfrak{NA} = LF(f)$, где $f(p) = \mathfrak{A}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Заметим, что $G = N \rtimes M$, где M – минимальная неабелева группа по [13; лемма 23.2]. Так как M не является циклической группой, то в M найдутся две максимальные абелевы подгруппы M_1 и M_2 такие, что $M = M_1M_2$. Тогда $\mathrm{F}(G)M_1$ и $\mathrm{F}(G)M_2$ – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант. Так как насыщенная подформация $\mathfrak{NA} \cap \mathfrak{X}$ является $\mathrm{F}(G)$-радикальной в $\mathfrak{X}$, то

$$G = (\mathrm{F}(G)M_1)(\mathrm{F}(G)M_2) \in \mathfrak{NA}.$$

Получили противоречие с выбором G. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{NA}$.

Покажем, что из (2) следует (1). Предположим, что всякая группа из наследственной насыщенной формации $\mathfrak{X}$ имеет нильпотентный коммутант.

Покажем, что любая насыщенная наследственная подформация $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{X}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы G. Предположим противное. Пусть группа G – контрпример наименьшего порядка.

Тогда $\Phi(G) = 1$ ввиду леммы 2.1 и насыщенности $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 2.5, подгруппы $A\mathrm{F}(G)$ и $B\mathrm{F}(G)$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\mathrm{F}(G) \leqslant A \cap B$. Так как $G' \leqslant \mathrm{F}(G)$, то $A \trianglelefteq G$ и $B \trianglelefteq G$.

Пусть $K \trianglelefteq G$. Тогда AK/K и BK/K – $\mathrm{F}(G/K)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G/K. Таким образом, $G/K \in \mathfrak{F}$. Поэтому в G имеется единственная минимальная нормальная p-подгруппа N. По лемме 2.1

$$N = C_G(N) = \mathrm{F}(G) = G^{\mathfrak{F}}.$$

Пусть F – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. По [6; теорема 4.7] формация $F(q)$ наследствена для любого $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G/C_G(N) \notin F(p)$. Тогда в $G/C_G(N)$ имеется минимальная не $F(p)$-подгруппа $H/C_G(N)$. Отметим, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $H/C_G(N)$ – циклическая группа и $|H/C_G(N)| = q^\alpha$ для некоторого $q \in \mathbb{P}$.

Поскольку абелева группа $G/C_G(N)$ есть произведение подгрупп $A/C_G(N)$ и $B/C_G(N)$, то экспонента группы $G/C_G(N)$ есть наименьшее общее кратное экспонент групп $A/C_G(N)$ и $B/C_G(N)$. Тогда либо $A/C_G(N)$ либо, $B/C_G(N)$ содержат циклическую подгруппу порядка q^α.

По лемме 2.6 имеем $A/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Аналогично, $B/C_G(N) \in F(p)$. Ввиду наследственности $F(p)$, $H/C_G(N) \in F(p)$, заключительное противоречие.

5. Доказательство теоремы C.

В начале докажем следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация метанильпотентных групп. Если группа G содержит две субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация метанильпотентных групп. Предположим, что лемма неверна и группа G – контрпример наименьшего порядка. Тогда G содержит две субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы A и B, имеющие взаимно простые индексы в G, и $G \notin \mathfrak{F}$.

Заметим, что условия леммы сохраняются при переходе к фактор-группам. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то в силу выбора G можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $\Phi(G) = 1$. Заметим, что N – p-группа, где p – некоторое простое число. Ввиду леммы 2.1

$$N = \mathrm{F}(G) = C_G(N) = \mathrm{F}_p(G).$$

Кроме того, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как формация всех метанильпотентных групп радикальна и $G = AB$, где A и B – субнормальные метанильпотентные подгруппы, то G метанильпотентна. Рассмотрим подгруппу $H = NA$. Нетрудно видеть, что для H выполняются условия леммы 2.5. Поэтому $H \in \mathfrak{F}$. Аналогично доказывается, что подгруппа $K = NB \in \mathfrak{F}$. Заметим, что H и K – субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G. В виду выбора G можно считать, что H и K – собственные подгруппы G.

Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщена, то она локальна. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Если мы покажем, что

$$G/C_G(N) = G/N \in F(p),$$

то будем иметь $G \in \mathfrak{F}$. Так как $N = C_G(N)$, то $\mathrm{F}_p(H)$ – p-группа. Из $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.3 получаем, что $H/\mathrm{F}_p(H) \in F(p)$. Из $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$ и того, что $\mathrm{F}_p(H)$ – p-группа, следует, что $H/N \in F(p)$. Аналогично доказывается, что $K/N \in F(p)$. Из $(|G : H|, |G : K|) = 1$ следует

$$(|G/N : H/N|, |G/N : K/N|) = 1.$$

Так как G метанильпотентна и $N = \mathrm{F}(G)$, то G/N нильпотентна. Пусть R/N – произвольная силовская подгруппа из G/N. Тогда R/N является силовской подгруппой либо в H/N, либо в K/N. Из $\{H/N, K/N\} \subseteq F(p)$ следует, что $R/N \in F(p)$. Так как $F(p)$ – формация и G/N нильпотентна, то $G/N \in F(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Перейдем к доказательству теоремы C. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация метанильпотентных групп, то из [7; теорема IV.3.18] следует наследственность $\mathfrak{F}$. Пусть группа G содержит три $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C с попарно взаимно простыми индексами. Согласно теореме Виландта [6; теорема 4.11] группа G разрешима. По лемме 2.5 подгруппы $A_1 = A\mathrm{F}(G)$, $B_1 = B\mathrm{F}(G)$ и $C_1 = C\mathrm{F}(G)$ принадлежат $\mathfrak{F}$.

Покажем, что группа G является метанильпотентной. Отметим, что $\mathfrak{N}^2 = LF(f)$, где $f(p) = \mathfrak{N}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Пусть H/K – главный фактор G, лежащий ниже $\mathrm{F}(G)$. Тогда H/K – p-группа для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Так как группа A_1 – метанильпотентна, то $A_1/C_{A_1}(H/K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$ по лемме 2.6. Следовательно, $A_1C_G(H/K)/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Аналогично доказывается, что

$$B_1C_G(H/K)/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N} \qquad \text{и} \qquad C_1C_G(H/K)/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}.$$

Таким образом, $G/C_G(H/K)$ содержит три $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$-подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. По [6; лемма 4.13] $G/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Так как H/K – главный фактор G, то $\mathrm{O}_p(G/C_G(H/K)) = K/K$. Таким образом,

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{N}^2.$$

Итак, $\mathrm{F}(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{N}^2}(G)$. Так как $G^{\mathfrak{N}^2} \leqslant C_G(\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}^2}(G))$ по [7; теорема IV.6.10], то $G^{\mathfrak{N}^2} \leqslant \mathrm{F}(G) \leqslant Z_{\mathfrak{N}^2}(G)$. Значит, $G \in \mathfrak{N}^2$.

Так как всякая подгруппа нильпотентной группы субнормальна и $G^{\mathfrak{N}} \leqslant \mathrm{F}(G) \leqslant A_1 \cap B_1$, то метанильпотентная группа G содержит две субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы попарно взаимно простых индексов. По лемме 5.1 $G \in \mathfrak{F}$.

6. Заключительные замечания и нерешенные проблемы. При доказательстве теоремы A (из (3) следует (1) и (2)) мы показали, что если $\mathrm{F}(G)$ лежит в пересечении нормализаторов всех холловых π_i-подгрупп группы G для любого $i \in I$, то $\mathrm{F}(G) \leqslant \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. В работе [29] в классе произвольных групп был получен более сильный результат, а именно $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с пересечением нормализаторов всех максимальных π_i-подгрупп группы G для любого $i \in I$ для любой группы G, где $\mathfrak{F} = \bigtimes_{i\in I}\mathfrak{G}_{\pi_i}$. Этот результат обобщает известную теорему Холла [30] (см. также работу Бэра [31]) о том, что гиперцентр группы совпадает с пересечением нормализаторов всех ее силовских подгрупп.

Заметим, что любой $\mathrm{F}(G)$-радикальный класс групп является классом Фиттинга. Поэтому естественной представляется следующая проблема.

Проблема 3. *Описать все* $\mathrm{F}(G)$*-радикальные в* $\mathfrak{S}$ *классы разрешимых групп. Является ли всякий* $\mathrm{F}(G)$*-радикальный в* $\mathfrak{S}$ *класс разрешимых групп формацией?*

Напомним [7; определение VI.3.1], что класс Шунка $\mathfrak{X}$ называется D*-классом*, если каждая группа G имеет единственный класс максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Нетрудно показать, что D-класс Шунка $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}(G)$-субнормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы G.

Проблема 4. *Описать все разрешимые* $\mathrm{F}(G)$*-радикальные в* $\mathfrak{S}$ *классы Шунка.*

В произвольной группе подгруппа Фиттинга может потерять многие свойства, которые она имела в разрешимых группах. Более того, существует бесконечное множество неизоморфных неразрешимых групп с $\mathrm{F}(G) = 1$. В этом случае аналогами подгруппы Фиттинга являются обобщенная подгруппа Фиттинга (квазинильпотентный радикал) $\mathrm{F}^*(G)$ и подгруппа $\widetilde{F}(G)$.

Напомним, что $\mathrm{F}^*(G)$ можно определить из следующей формулы [7; с. 580]

$$\mathrm{F}^*(G)/\mathrm{F}(G) = \mathrm{Soc}(C_G(\mathrm{F}(G))\mathrm{F}(G)/\mathrm{F}(G)).$$

Подгруппа $\widetilde{F}(G)$ определяется [6; определение 7.5] из

$$\widetilde{F}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G)).$$

Как было показано в [32], $\mathrm{F}^*(G) \subseteq \widetilde{F}(G)$ для любой группы G. Другие связи и приложения этих подгрупп были установлены в работе [33]. По аналогии с определениями 1 и 2 введем следующее

Определение 6.1. Подгруппа H группы G называется $\mathrm{F}^*(G)$*-субнормальной* ($\widetilde{F}(G)$*-субнормальной*), если H субнормальна в $H\mathrm{F}^*(G)$ (соответственно, H субнормальна в $H\widetilde{F}(G)$).

Определение 6.2. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$ будем называть $\mathrm{F}^*(G)$*-радикальным* ($\widetilde{F}(G)$*-радикальным*) в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B – $\mathrm{F}^*(G)$-субнормальные (соответственно, $\widetilde{F}(G)$-субнормальные) $\mathfrak{F}$-подгруппы G.

В работе [34] была установлена $\mathrm{F}^*(G)$-радикальность формации всех квазинильпотентных групп.

Проблема 5. *Описать все* (*наследственные*) $\mathrm{F}^*(G)$*-радикальные* ($\widetilde{F}(G)$*-радикальные*) *в классе всех групп формации.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательное чтение рукописи и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. Амберг, Л. С. Казарин, Б. Хефлинг, “Конечные группы с кратными факторизациями”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1251–1263.

[2] А. Ф. Васильев, “Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах”, *Украинский матем. журн.*, **54**:9 (2002), 1163–1171.

[3] A. F. Vasil’ev, “On products of nonnormal subgroups of finite soluble groups”, *Acta Appl. Math.*, **85**:1 (2005), 305–311.

[4] H. Fitting, “Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **48** (1938), 77–141.

[5] R. A. Bryce, J. Cossey, “Fitting formations of finite soluble groups”, *Math. Z.*, **127**:4 (1972), 217–223.

[6] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978.

[7] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[8] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Springer, Dordrecht, 2006.

[9] В. Н. Семенчук, Л. А. Шеметков, "Сверхрадикальные формации", *Докл. НАН Беларуси*, **44**:5 (2000), 23–25.

[10] В. Н. Семенчук, "Об одном классе наследственных насыщенных сверхрадикальных формаций", *Сиб. матем. журн.*, **55**:1 (2014), 97–108.

[11] A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, V. N. Tyutyanov, "On a problem of L. A. Shemetkov on superradical formations of finite groups", *J. Algebra*, **403** (2014), 69–76.

[12] В. И. Мурашко, А. В. Васильев, "О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп", *Вестн. ВГУ*, **70**:4 (2012), 24–27.

[13] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Наука, М., 1989.

[14] L. A. Shemetkov, "Frattini extensions of finite groups and formations", *Comm. Algebra*, **23**:3 (1997), 955–964.

[15] A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos, "On a question of L. A. Shemetkov", *Comm. Algebra*, **27**:11 (1999), 5615–5618.

[16] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*, Беларуская навука, Минск, 2003.

[17] H. G. Bray, W. E. Deskins, D. Johnson, J. F. Humphreys, B. M. Puttaswamaiah, P. Venzke, G. L. Walls, *Between Nilpotent and Solvable*, Polygonal Publ. House, Washington, NJ, 1982.

[18] R. Baer, "Classes of finite groups and their properties", *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115–187.

[19] А. Ф. Васильев, Д. Н. Симоненко, "Относительно радикальные локальные формации", *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **38**:5 (2006), 19–25.

[20] D. K. Friesen, "Products of Normal Supersolvable Subgroups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30** (1971), 46–48.

[21] В. С. Монахов, И. К. Чирик, "Конечные группы, факторизуемые субнормальными сверхразрешимыми подгруппами", *ПФМТ*, 2016, № 3 (28), 40–46.

[22] K. Doerk, "Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen", *Math. Z.*, **91** (1966), 198–205.

[23] O. U. Kramer, "Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes", *Math. Z.*, **138**:1 (1974), 63–68.

[24] N. Flowers, T. P. Wakefiels, "On a group with three supersoluble subgroups of pairwise relatively prime indices", *Arch. Math. (Basel)*, **95**:4 (2010), 309–315.

[25] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, "Triple factorization and supersolubility of finite groups", *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **59**:2 (2016), 301–309.

[26] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков, "Конечные группы с тремя заданными подгруппами", *Сиб. матем. журн.*, **59**:1 (2018), 65–77.

[27] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, "О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами", *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 11, 10–14.

[28] А. Х. Журтов, С. А. Сыскин, "О группах Шмидта", *Сиб. матем. журн.*, **28**:2 (1987), 74–78.

[29] В. И. Мурашко, "Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале", *ПФМТ*, 2013, № 3 (16), 84–88.

[30] P. Hall, "On the system normalizers of a soluble group", *Proc. London Math. Soc.* (2), **43**:7 (1937), 507–528.

[31] R. Baer, "Group elements of prime power index", *Trans. Amer. Math Soc.*, **75** (1953), 20–47.

[32] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. В. Сыроквашин, "Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп", *ПФМТ*, 2012, № 2 (11), 62–64.

[33] В. И. Мурашко, А. Ф. Васильев, “О подгруппе Шеметкова–Шмида и связанных с ней подгруппах конечных групп”, *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **84**:3 (2014), 23–29.

[34] В. И. Мурашко, “Произведения $\mathrm{F}^*(G)$-субнормальных подгрупп конечных групп”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 6, 76–82.

А. Ф. Васильев
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: formation56@mail.ru

В. И. Мурашко
Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины, Республика Беларусь
E-mail: mvimath@yandex.ru

Поступило
14.09.2018
После доработки
13.05.2019
Принято к публикации
04.09.2019