3. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. On a question of Beidleman and Robinson // Commun. Algebra 2002. Vol. 30 (12). P. 5757-5770.

4. Ballester-Bolinches A., Cossey J., Qiao S. A note on finite groups with the maximal permutiser condition // RACSAM. 2016. Vol. 110. P. 247–250.

5. The GAP Group: GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.11.1 released on 02-03-2021 [Электронный ресурс], Режим доступа: http://www.gap-system.org.

УДК 512.542

Некоторые примеры использования системы компьютерной алгебры GAP при решении открытых вопросов теории групп

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.by

Some examples of using the computer algebra system GAP in solving open questions of the group theory

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.by

В докладе будет обсуждаться использование системы компьютерной алгебры GAP при решении открытых вопросов теории групп. Ниже приведем ряд таких вопросов.

Напомним [1], что подгруппа H группы G называется сопряженно-перестановочной, если $HH^x = H^xH$ для каждого $x \in G$. Группа называется ECP-группой [2] (соответственно CCP-группой [3]), если каждая ее (соответственно циклическая) подгруппа сопряженно-перестановочна. Довольно интересен класс всех ECP-групп. Он включает классы групп, все подгруппы которых 2-субнормальны и все подгруппы которых перестановочны. В [2] было доказано, что конечная группа G является ECP-группой тогда и только тогда, когда G нильпотентна и каждая силовская p-подгруппа в G является ECP-группой. Этот результат сводит изучение ECP-групп к изучению ECP-p-групп. В таком случае Минъяо Сюй и Циньхай Чжан задали следующие вопросы:

Задача 4 ([2, Вопрос 3.9]). *Всякая ли конечная группа экспоненты 3 является ECP-группой?*

Задача 5 ([2, Вопрос 3.13]). *Образует ли класс всех конечных ECP-групп многообразие или формацию?*

Задача 6 ([2, Вопрос 3.12]). *При $p = 3$ всякая ли конечная ECP-p-группа регулярна?*

Прямой проверкой можно убедиться, что ответ на задачу 4 положительный.

Теорема 1 ([4]). *Всякая группы экспоненты 3 является ECP-группой.*

С помощью пакета компьютерной алгебры GAP был построен пример, дающий отрицательный ответ на вопрос задачи 5. Пусть

$$G = \langle a, b, c, d \mid a^{27} = c^{27} = b^9 = d^9 = [a, c] = [a, d] = [b, c] = [b, d] = a^b a^{-4} = c^d c^{-4} = 1\rangle.$$

Здесь группа G является прямым произведением ECP-подгрупп $H_1 = \langle a, b\rangle$ и $H_2 = \langle c, d\rangle$. Пусть $K = \langle a^3b^2c^3d\rangle$ и $x = abcd$. Тогда $KK^x \neq K^xK$. Т.е. G не является ни ECP-группой, ни CCP-группой.

Теорема 2 ([4]). *Классы всех конечных CCP-групп и ECP-групп не замкнуты относительно взятия прямых произведений. Следовательно, они не являются ни формациями, ни многобразиями.*

Напомним, что конечная p-группа G называется регулярной, если для любых $x, y \in G$ выполняется $(xy)^p = x^py^p \prod_i d_i^p$, где все d_i принадлежат коммутанту группы, порожденной x и y. Аналогичным образом, с помощью пакета компьютерной алгебры GAP был построен пример, дающий отрицательный ответ на вопрос задачи 6.

Пуст $G = \langle a, b\rangle$, где

$$\begin{aligned} a =& (1, 2, 6, 5, 9, 18, 15, 24, 37)(3, 20, 70, 12, 41, 79, 29, 62, 53)\\ & (4, 23, 57, 14, 44, 17, 31, 8, 36)(7, 33, 66, 21, 54, 27, 42, 71, 48)\\ & (10, 58, 78, 26, 73, 51, 47, 80, 68)(11, 61, 16, 28, 75, 34, 49, 40, 55)\\ & (13, 63, 56, 30, 22, 72, 50, 43, 35)(19, 67, 25, 39, 77, 46, 60, 81, 65)\\ & (32, 64, 38, 52, 76, 59, 69, 45, 74),\\ b =& (1, 3, 10, 15, 29, 47, 5, 12, 26)(2, 7, 19, 24, 42, 60, 9, 21, 39)\\ & (4, 11, 25, 31, 49, 65, 14, 28, 46)(6, 16, 32, 37, 55, 69, 18, 34, 52)\\ & (8, 20, 38, 44, 62, 74, 23, 41, 59)(13, 27, 45, 50, 66, 76, 30, 48, 64)\\ & (17, 33, 51, 57, 71, 78, 36, 54, 68)(22, 40, 58, 63, 75, 80, 43, 61, 73)\\ & (35, 53, 67, 72, 79, 81, 56, 70, 77). \end{aligned}$$

Тогда G является ECP-группой. Заметим, что экспонента G' равна 3. Следовательно, если G 3-регулярна, то $(ab)^3a^{-3}b^{-3} = ()$. Но

$$\begin{aligned} (ab)^3a^{-3}b^{-3} =& (1, 5, 15)(2, 9, 24)(3, 12, 29)(4, 14, 31)(6, 18, 37)(7, 21, 42)(8, 23, 44)(10, 26, 47)\\ & (11, 28, 49)(13, 30, 50)(16, 34, 55)(17, 36, 57)(19, 39, 60)(20, 41, 62)(22, 43, 63)\\ & (25, 46, 65)(27, 48, 66)(32, 52, 69)(33, 54, 71)(35, 56, 72)(38, 59, 74)(40, 61, 75)\\ & (45, 64, 76)(51, 68, 78)(53, 70, 79)(58, 73, 80)(67, 77, 81) \end{aligned}$$

Теорема 3 ([4]). *Существуют конечные нерегулярные ECP-3-группы.*

В ходе поиска примеров и контрпримеров использовались следующие алгоритмы:

```
IsECPGroup:=function(G)
local S,b,a;
  S:=ConjugacyClassesSubgroups(G);
  for a in S do
    for b in ConjugateSubgroups(G,a[1]) do
      if (not ArePermutableSubgroups(b,a[1])) then
        return false;
      fi;
```

```
    od;
  od;
  return true;
end;;
```

Приведенный алгоритм проверяет, является ли группа ECP-группой. Если в нем заменить строку

“`S:=ConjugacyClassesSubgroups(G);`”

на строку

“`S:=Filtered(ConjugacyClassesSubgroups(G),x->IsCyclic(x[1]));`”,

то мы получим алгоритм, проверяющий, является ли группа CCP-группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Foguel T. Conjugate-permutable subgroups // J. Algebra. 1997. № 191. P. 235–239.
2. Xu M., Zhang Q. On conjugate-permutable subgroups of a finite group // Algebra Colloquium. 2005. Vol. 12. P. 669–676.
3. Foguel T. Groups with all cyclic subgroups conjugate-permutable groups // J. Group Theory. 1999. Vol. 2. P. 47–51.
4. Murashka V.I. On groups with conjugate-permutable subgroups // Asian-European J. Math. (online ready). https://doi.org/10.1142/S179355712250108X.

УДК 512.542

О некоторых свойствах решетки Бэра-σ-локальных формаций конечных групп[1]

В. Г. Сафонов (Беларусь, г. Минск)
Белорусский государственный университет
e-mail: vgsafonov@bsu.by

On some properties of the lattice of Baer-σ-local formations of finite groups

V. G. Safonov (Belarus, Minsk)
Belarusian State University
e-mail: vgsafonov@bsu.by

Все рассматриваемые в данном сообщении группы конечны.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. В последние годы усилиями многочисленных исследователей интенсивно развивается предложенный А.Н.Скибой [1] метод изучения групп

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ грант Ф20Р-291