

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГОВ ЯДРА КОШИ И РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ СЛОЖНОГО КОНТУРА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 30 X 1970)

Пусть $\mathfrak{R}$ — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода h и пусть $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, h$, — фиксированная система канонических сечений на ней. Основными функционалами поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть мероморфные всюду на $\mathfrak{R}$ (рациональные) функции, а также абелевы дифференциалы. Через $dw_k(p), k = 1, 2, \dots, h$, обозначим комплексно-нормированный базис дифференциалов I рода на $\mathfrak{R}$; через $dw_{q_0}(p)$ обозначим комплексно-нормированный дифференциал III рода (по p) с двумя простыми полюсами в точках $p = q$ и $p = q_0$, в которых вычеты равны $+1$ и -1 соответственно. Существование нормированных дифференциалов обеспечено соответствующими римановыми теоремами ⁽¹⁾. В случае, когда поверхность $\mathfrak{R}$ задана алгебраическим уравнением $f(z, w) = 0$, ее основные функционалы, как известно ⁽²⁾, рационально выражаются через z и w .

На $\mathfrak{R}$ задан сложный кусочно-гладкий контур L , т. е. конечная совокупность гладких жордановых (замкнутых или разомкнутых) кривых, которые могут иметь между собой конечное число общих точек. Ориентация кривых контура L фиксируется произвольно и не влияет на формулируемые ниже задачи и результаты. Для дальнейшего не существенно взаимное расположение на $\mathfrak{R}$ контура L и канонических сечений a_k, b_k . На множестве $\{L\}$ точек контура L задан дивизор $\Lambda = t_1 t_2 \dots t_s$ такой, что множество $\{L\} - \Lambda$ распадается на конечное число связных компонент $\{L_1\}, \{L_2\}, \dots, \{L_N\}$ («кривых» контура L), каждая из которых есть гладкая открытая жорданова кривая, гомеоморфная интервалу $(0, 1)$ числовой оси. На каждой кривой L_j задана H -непрерывная функция $G_j(t) \neq 0, j = 1, 2, \dots, N$, H -непрерывно продолжимая на начало t_k и конец t_n кривой L_j и имеющая там конечные и отличные от нуля предельные значения $G_j(t_k + 0)$ и $G_j(t_n - 0)$. Обозначим $\alpha_k(t) \delta_{jk}, t \in L_j$, где δ_{jk} — символ Кронекера, и положим

$G(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) G_k(t)$. Задан дивизор $\mathcal{F}$ порядка m , составленный из точек дивизора Λ . На $\mathfrak{R} - \{L\}$ задан другой дивизор $\mathcal{D}$ порядка n . Постановка однородной задачи Римана для функций коротко записывается в виде

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad \mathcal{F}^{-1} \mathcal{D}^{-1} | (\Phi), \quad t \in L. \quad (1)$$

Сформулируем ее подробно.

Найти все функции $\Phi(p)$, мероморфные на $\mathfrak{R} - \{L\}$, кратные там дивизору $\mathcal{D}^{-1}$, H -непрерывно продолжимые на $\{L\} - \Lambda$, предельные значения которых $\Phi^+(t)$ (слева) и $\Phi^-(t)$ (справа) удовлетворяют на $\{L\} - \Lambda$ краевому условию (1). В окрестности точек дивизора Λ поведение иско-
мых функций определяется требованием: $\Phi(p)$ должна быть кратной дивизору $\mathcal{F}^{-1}$. При этом кратность * функции $\Phi(p)$ дивизору $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{D}^{-1}$ озна-

* Термин «кратность» взят из ⁽⁸⁾. Символ $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{D}^{-1} | (\Phi)$ читается так: «дивизор $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{D}^{-1}$ делит дивизор функции $\Phi(p)$ ». Понятия псевдократность и квазикратность вводятся здесь впервые. Эти понятия служат для выделения классов решений краевых задач, аналогичных классам Н. И. Мусхелишвили, и сопряженных классов ⁽³⁾. гл. IV, ⁽⁴⁾, §§ 41—44).

чает, что порядок (малости) функции $\Phi(p)$ вблизи каждой точки дивизора $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ по отношению к локальному параметру не меньше, чем порядок той степени локального параметра, которая задана в дивизоре $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$. Обобщением понятия кратности является псевдократность функции $\Phi(p)$ дивизору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ (обозначается $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1} \nmid (\Phi)$). Псевдократными дивизору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ считаются все те функции, допустимый порядок роста которых вблизи каждой точки дивизора $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ лишь на логарифм локального параметра может превысить порядок, указанный в дивизоре $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$. Обобщением понятия псевдократности является квазикратность функции $\Phi(p)$ дивизору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ (обозначается $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1} \parallel (\Phi)$). Это понятие отличается от понятия псевдократности тем, что слова «логарифм локального параметра» заменяется словами «произвольную функцию локального параметра, допускающую в точках дивизора $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}$ интегрируемую особенность». Аналогично определяются понятия кратности, псевдократности, квазикратности кусочно-мероморфного дифференциала $d\Psi(p)$ дивизору $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Постановки неоднородной задачи Римана для функций, а также однородной и неоднородной задачи Римана для дифференциалов в наших обозначениях коротко записываются соответственно в виде

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1} \nmid (\Phi), \quad t \in L; \quad (2)$$

$$d\Psi^-(t) = G(t)d\Psi^+(t), \quad \mathcal{F}\mathcal{D} \parallel (d\Psi), \quad t \in L; \quad (3)$$

$$d\Psi^-(t) = G(t)d\Psi^+(t) + dh(t), \quad \mathcal{F}\mathcal{D} \parallel (d\Psi), \quad t \in L. \quad (4)$$

Здесь $g(t)$ — H -непрерывная на $\{L\}$ — Λ функция, кратная дивизору $\mathcal{F}^{-1}$, $dh(t)$ — H -непрерывный дифференциал, квазикратный дивизору $\mathcal{F}$.

Задачи (1) — (4) в различных частных случаях изучались ранее в ⁽⁶⁻¹²⁾. Основным методом исследования был метод интегральных уравнений. Кроме того, в работах ⁽¹⁰⁻¹²⁾ к исследованию числа решений и к построению самих решений была привлечена проблема обращения Якоби. В сформулированной выше общей постановке задачи (1) — (4) рассматриваются впервые и дается полная картина их разрешимости. Кроме того, построены общие решения этих задач в замкнутой форме. Последнее означает, что решения выражены в виде явных формул через коэффициенты краевых условий задач, основные функционалы римановой поверхности и через решение вспомогательной проблемы обращения Якоби.

Переходя к формулировке полученных результатов, зафиксируем точку $q_0 \in \mathfrak{R} - \{L\}$ и рассмотрим выражение $d\omega_{q_0}(p)$ как функцию переменного q . Эта функция многозначна, аналитична всюду на $\mathfrak{R}$, кроме точки $q = p$, где она имеет простой полюс. Через $\mathfrak{R}$ обозначим поверхность $\mathfrak{R}$, разрезанную линиями $a_1, a_2, \dots, a_h$. Можно выделить ветвь функции $d\omega_{q_0}(p)$, однозначную на $\mathfrak{R}$ по q . Через $\hat{d}\omega_{q_0}(p)$ обозначим ту из выделенных ветвей, которая удовлетворяет условию $\hat{d}\omega_{q_0}(p) \equiv 0$. Ветвь $\hat{d}\omega_{q_0}(p)$ назовем разрывным аналогом ядра Коши на $\mathfrak{R}$.

Общее решение задачи (1) дается формулой

$$\Phi(q) = \varphi(q) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(\tau) d\hat{\omega}_{q_0}(\tau) - \sum_{j=1}^h \left(\int_q^{q_j} d\hat{\omega}_{q_0}(\tau) - 2\pi i m_j \int_q^q d\omega_j(\tau) \right) \right\}, \quad (5)$$

где $\tilde{q} \in \mathfrak{R}$ — произвольно фиксированная точка, а точки $q_1, q_2, \dots, q_h$, целые числа $m_1, m_2, \dots, m_h$, а также не входящие в формулы (5) целые числа $n_1, n_2, \dots, n_h$ находятся из проблемы обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^h \int_q^{q_j} dw_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(\tau) dw_k(\tau) + n_k + \sum_{j=1}^h m_j \int_{b_k} dw_j(\tau), \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (6)$$

Штрихи перед интегралами в формулах (5) и (6) означают, что пути интегрирования не пересекают канонических сечений. Функция $\varphi(q)$ есть произвольная мероморфная всюду на $\mathbb{R}$ (рациональная) функция, кратная дивизору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{E}^{-1}\mathcal{F}^{-1}$, где дивизоры $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ заданы в условии задачи (1), а $\mathcal{E} = \hat{q}^h q_1^{-1} q_2^{-1} \dots q_n^{-1}$. Для определения дивизора $\mathcal{E}$ обозначим

$$\kappa_k = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_j' \arg G_j(t_k - 0) - \sum_j' \arg G_j(t_k + 0) \right), \quad k = 1, 2, \dots, S, \quad (7)$$

где суммы $\sum_j'$ и $\sum_j''$ распространены на все кривые L_j контура L , которые начинаются и оканчиваются соответственно в точке t_k дивизора Λ . Ветвь функции $\ln G(t)$ зафиксирована произвольно; важно лишь, чтобы в формулах (5)–(7) входила одна и та же ветвь логарифма (аргумента). Дивизор $\mathcal{E}$ находится по формуле $\mathcal{E} = t_1^{[\kappa_1]} t_2^{[\kappa_2]} \dots t_S^{[\kappa_S]}$, где $[\kappa_k]$ означает

целую часть числа κ_k . Порядок дивизора $\mathcal{E}$ $\text{ord } \mathcal{E} = \sum_{k=1}^S [\kappa_k] = \kappa$ есть целое

число, не зависящее ни от выбора ветви функции $\ln G(t)$, ни от выбора ориентации кривых контура L . Мы назовем число κ индексом (по Н. И. Мухелишвили) коэффициента $G(t)$ задачи (1).

Общее решение задачи (3) дается формулой

$$d\Psi(q) = d\psi(q) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(\tau) d\hat{\omega}_{q q_0}(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^h \left(\int_{\gamma_j}^{q_j} d\hat{\omega}_{q q_0}(\tau) - 2\pi i m_j \int_{\gamma_j}^{q_j} dw_j(\tau) \right) \right\}, \quad (8)$$

где $d\psi(q)$ — произвольный абелев дифференциал, кратный дивизору $\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}$, а все остальные символы в формуле (8) и ветвь логарифма — те же, что и в формулах (5)–(7).

Обозначая через l и l' число решений задач (1) и (3) соответственно, имеем утверждения: 1) $l - l' = \kappa + m + n - h + 1$ (теорема об индексе задачи (1)); 2) $l = \max \{0, \kappa + m + n - h + 1\}$, если $\kappa + m + n < 0$, или если $\kappa + m + n > 2h - 2$; 3) $\max \{0, \kappa + m + n - h + 1\} \leq l \leq \lfloor (\kappa + m + n) / 2 \rfloor + 1$, если $0 \leq \kappa + m + n \leq 2h - 2$, причем эта оценка точная.

Задачи (1) и (3) являются сопряженными одна к другой, и в терминах их решений можно записать необходимые и достаточные условия разрешимости задач (2) и (4) соответственно

$$\int_L g(t) d\Psi^+(t) = 0 \quad \text{и} \quad \int_L \Phi^-(t) dh(t) = 0, \quad (9)$$

где $d\Psi(q)$ и $\Phi(q)$ — общие решения задач (3) и (1) соответственно.

Учитывая формулы (5) и (8), для построения общих решений задач (2) и (4) достаточно построить их частные решения. Ограничимся построением частного решения задачи (2), считая ее разрешимой.

Пусть задача (3) разрешима, а $d\Psi_0(p)$ — некоторое ее частное решение, найденное, например, по формуле (8). Задачу (2) перепишем в виде задачи о скачке для нахождения кусочно-аналитического дифференциала $\Phi(p) d\Psi_0(p)$.

$$\Phi^+(t) d\Psi_0^+(t) - \Phi^-(t) d\Psi_0^-(t) = g(t) d\Psi_0^+(t), \quad t \in L. \quad (10)$$

Общее решение этой задачи находится с помощью одной квадратуры с ядром $d\hat{\omega}_{q q_0}(p)$, откуда легко находится $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \left[\sum_{k=1}^h c_k dw_k(p) - \frac{1}{2\pi i} \int_L d\hat{\omega}_{\tau q_0}(p) g(\tau) d\Psi_0^+(\tau) \right] / d\Psi_0(p), \quad (11)$$

где неопределенные постоянные c_k находятся из условия $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}^{-1}\xi(\Phi)$.

Для построения частного решения задачи (2) в остальных случаях весьма полезным является понятие мероморфного аналога ядра Коши с наперед заданным дробным минимальным характеристическим дивизором Δ . Так назовем всякое выражение $A(p, q)dp$, которое по переменной p есть абелев дифференциал, кратный дивизору $q^{-1}q_0^{-1}\Delta$, имеющий в точке $p = q$ вычет $+1$, а по переменной q есть мероморфная всюду на $\mathfrak{R}$ функция, кратная дивизору $p^{-1}q_0\Delta^{-1}$. В (5) дан алгоритм построения ядра в случае целого дивизора Δ , которое для наших целей является недостаточно общим. Нами построена явная формула для ядра Коши с дробным характеристическим дивизором

$$\Delta = \frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}}{q_1^{m_1+1} q_2^{m_2+1} \dots q_v^{m_v+1}}; \text{ord } \Delta = h, i[\Delta] = 0; v \geq 0, n_j > 0, m_j \geq 0. \quad (12)$$

Ввиду громоздкости этой явной формулы приведем здесь ее только в частном случае $\Delta = p_1 p_2 \dots p_h$, где все p_j различны:

$$A(p, q) dp = \frac{\begin{vmatrix} d\hat{\omega}_{q q_0}(p) & dw_1(p) \dots dw_h(p) \\ d\hat{\omega}_{q q_0}(p_1) & dw_1(p_1) \dots dw_h(p_1) \\ \dots & \dots \\ d\hat{\omega}_{q q_0}(p_h) & dw_1(p_h) \dots dw_h(p_h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dw_1(p_1) \dots dw_h(p_1) \\ \dots \\ dw_1(p_h) \dots dw_h(p_h) \end{vmatrix}}. \quad (13)$$

В случае произвольного дивизора (12) ядро строится аналогично (13) в виде отношения двух определителей, причем знаменатель есть алгебраическое дополнение элемента $d\hat{\omega}_{q q_0}(p)$, стоящего в левом верхнем углу числителя. Минимальность дивизора Δ обеспечивает квадратность таблиц-определителей и отличие от нуля знаменателя. Первая строка числителя

$$d\hat{\omega}_{q q_0} d\hat{\omega}_{q_1 q_0} \dots d\hat{\omega}_{q_1^{m_1} q_1} [d\hat{\omega}_{q_1 q_0}] \dots d\hat{\omega}_{q_v q_0} \dots d\hat{\omega}_{q_v^{m_v} q_v} [d\hat{\omega}_{q_v q_0}] dw_1 \dots dw_h.$$

Остальные строки числителя получаются как значения первой строки и ее дифференциалов до порядков n_j в точках $p = p_j, j = 1, 2, \dots, k$.

Неразрешимость задачи (3) равносильна условиям $i[\mathcal{FDE}] = 0$, $\text{ord}[\mathcal{FDE}] \geq h$, следовательно, дивизор $\mathcal{FDE}$ можно дополнить до минимального дивизора Δ , добавляя в его знаменатель конечное число точек. Принимая этот минимальный дивизор за характеристический, построим соответствующий мероморфный аналог ядра Коши $A(p, q)dp$. Тогда частное решение задачи (2) имеет вид

$$\Phi(q) = \frac{\chi_0(q)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\chi_0^+(\tau)} A(\tau, q) d\tau, \quad (14)$$

где $\chi_0(q)$ — правая часть формулы (5), где следует положить $\varphi(q) \equiv 1$.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступило
7 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Шиффер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957. ² Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М., 1948. ³ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. ⁴ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. ⁵ С. Я. Гусман, Ю. Л. Родин, Сибирск. матем. журн., 3, № 4 (1962). ⁶ Ю. Л. Родин, В сборн. Исследования по современным проблемам ТФКП, М., 1960 и 1961. ⁷ Ю. Л. Родин, Уч. зап. Пермск. унив., 17, № 2 (1960). ⁸ W. Korrelman, J. Math. and Mech., 10, № 2 (1961). ⁹ Р. Н. Абдулаев, Тр. Груз. политехнич. инст., 1 (81) (1962). ¹⁰ Р. Н. Абдулаев, ДАН, 152, № 6 (1963). ¹¹ Р. Н. Абдулаев, ДАН, 160, № 5 (1965). ¹² Л. И. Чибрикова, В сборн. Краевые задачи теории аналитических функций, Казань, 1962.