

6. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π -групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
7. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π -групп // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.
8. Иванова Е. А. О нильпотентной аппроксимируемости обобщённых свободных произведений групп : дисс. . . канд. физ.-мат. наук / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2004. 92 с.
9. Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщённых свободных произведений групп // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1. С. 143–149.
10. Соколов Е. В. Нильпотентная аппроксимируемость некоторых свободных конструкций групп // Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 85-летию профессора С. С. Рышкова (Тула, 25–30 мая 2015 г.) — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. С. 101–103.

УДК 512.542

Об $\mathfrak{F}$ -гиперцентральных дисперсивных подгруппах конечных групп

В. И. Мурашко Беларусь, г. Гомель, Гомельский Государственный Университет имени Франциска Скорины
mvimath@yandex.ru

On the $\mathfrak{F}$ -hypercentral subgroups with ordered Sylow tower of finite groups

V. I. Murashka Belarus, Gomel, Francisk Skorina Gomel State University
mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные терминология и обозначения, которые, если необходимо, могут быть найдены в [1, 2].

Понятие гиперцентра естественно возникает в связи с определением нильпотентной группы через центральные ряды. Б. Хупперт ввел понятие $\mathfrak{F}$ -гиперцентра, где $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Л. А. Шеметков распространил понятие $\mathfrak{F}$ -гиперцентра на случай ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ (см. [1, §7]). Эти определения опираются на понятие экрана (формационной функции).

В монографии [3] Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой было предложено определение $\mathfrak{F}$ -гиперцентра для алгебраических систем, включающее случай конечных групп. Это определение не использует понятие экрана (формационной функции) и позволяет ввести понятие $\mathfrak{F}$ -гиперцентра группы для произвольной формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Напомним [3, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$ -центральным, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. $\mathfrak{X}$ -гиперцентром группы G называется наибольшая нормальная подгруппа G , все G -главные факторы ниже которой $\mathfrak{X}$ -центральны в G . Обозначается $Z_{\mathfrak{X}}(G)$.

Отметим, что согласно классическому результату Д. Барнса и О. Кегеля (см. [2, с. 335]), при таком определении всякая $\mathfrak{F}$ -группа совпадает со своим $\mathfrak{F}$ -гиперцентром для любой формации $\mathfrak{F}$. Однако, обратное утверждение не всегда верно.

Известно (см., например, [4, с. 10-11]), что $\mathfrak{X}$ -гиперцентр существует в любой группе и если $\mathfrak{F}$ — формация, то $Z_{\mathfrak{F}}(G/Z_{\mathfrak{F}}(G)) \simeq 1$ и $Z_{\mathfrak{F}}(G)N/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(GN/N)$. Однако не было даже установлено, что для произвольной нормально наследственной формации гиперцентр является идемпотентном, т.е. $Z_{\mathfrak{F}}(Z_{\mathfrak{F}}(G)) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Данный результат был получен только в случае, когда $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная композиционная формация. При этом доказательство существенным образом опирается на понятие композиционного экрана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — (нормально) наследственная формация и H — (нормальная) подгруппа группы G . Тогда

1. $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap H \leq Z_{\mathfrak{F}}(H)$.
2. $Z_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(Z_{\mathfrak{F}}(G))$.
3. $HZ_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Также нами было установлено следующее свойство $\mathfrak{F}$ -гиперцентра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, G_1 и G_2 — группы. Тогда

$$Z_{\mathfrak{F}}(G_1 \times G_2) = Z_{\mathfrak{F}}(G_1) \times Z_{\mathfrak{F}}(G_2).$$

В работе [5] для формации $\mathfrak{F}$ было начато исследование класса групп $z\mathfrak{F} = (G : Z_{\mathfrak{F}}(G) = G)$. Напомним, что всякое отображение множества всех классов групп в себя называется операцией на классах групп. Операция c на классах групп называется операцией замыкания, если $\mathfrak{X} \subseteq c\mathfrak{X} = c(c\mathfrak{X}) \subseteq c\mathfrak{H}$ для любых классов групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА 2. Операция z является операцией замыкания.

Напомним, что группа, имеющая нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам, называется дисперсивной; через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G ; $\text{Syl}_p G$ — множество силовских p -подгрупп G . Нами доказано

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — z -замкнутая наследственная формация и N — дисперсивная нормальная подгруппа группы G . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.
- (2) $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$ для любых $P \in \text{Syl}_p N$ и $p \in \pi(N)$.

Напомним [6], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной если или $H = G$, или существует цепь подгрупп $H = H_0 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число. Группа G называется w -сверхразрешимой [6] (v -сверхразрешимой [7]), если все силовские (циклические примарные) подгруппы G $\mathbb{P}$ -субнормальны в G .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть N — нормальная подгруппа группы G , обладающая силовской башней сверхразрешимого типа. Тогда и только тогда

(a) (Р. Бэр, [8]) $N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H | H/O_p(H) \text{ абелева экспоненты, делящей } p-1)$ для любых $P \in \text{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

(b) [9] $N \leq Z_{w\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H | \text{ все силовские подгруппы } H/O_p(H) \text{ абелевы экспоненты, делящей } p-1, \text{ и } \mathbb{P}\text{-субнормальны})$ для любых $P \in \text{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

(d) [10] $N \leq Z_{v\mathfrak{U}}(G)$, когда $N_G(P)/C_G(P) \in (H | \text{ все циклические примарные подгруппы } H/O_p(H) \text{ имеют экспоненту, делящую } p-1, \text{ и } \mathbb{P}\text{-субнормальны})$ для любых $P \in \text{Syl}_p(N)$ и $p \in \pi(N)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. 272 с.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
3. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука, 1989. 256 с.
4. Guo, W. Structure theory for canonical classes of finite groups. — Heidelberg — New-York — Dordrecht — London: Springer, 2015. 359 p.
5. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. On a question of L. A. Shemetkov // Communications in Algebra. 1999. Vol. 27 № 11. P. 5615-5618.
6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51 № 6. С. 1270-1281.
7. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62. P. 307-322.
8. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 318-326.
9. Murashka V. I. On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups // Asian-European J. Math. 2018. Vol. 11 № 3. 8 p. DOI:10.1142/S1793557118500432.
10. Мурашко В. И. Свойств класса конечных групп с $\mathbb{P}$ -субнормальными циклическими примарными подгруппами // Доклады НАН Беларуси. 2014. Том 58 № 1. С. 5-8.

УДК 512.541

Умножения на факторно делимых абелевых группах ранга 1

Нгуен Т. К. Ч. Россия, г. Москва, Московский государственный педагогический университет
trangnguyen.ru@gmail.com

Multiplications on quotient divisible abelian groups of rank 1

Nguyen T. Q. T. Russia, Moscow, Moscow Pedagogical State University
trangnguyen.ru@gmail.com

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu : G \otimes G \rightarrow G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G . Множество $MultG$ всех умножений на группе G является абелевой группой относительно операции сложения. Зависимость между строением абелевой группы и свойствами колец на ней изучалась в работах Л. Фукса, Р. Бьюмонта, Р. Пирса, С. Фейгельстока, Е. Компанцевой, Р. Андрушкевича и других. В [1] сформулирована проблема изучения TI -групп. Абелева группа G называется TI -группой, если любое кольцо на G является филиальным. Кольцо R называется филиальным, если из $I \triangleleft J \triangleleft R$ следует $I \triangleleft R$ для любых подколец I, J кольца R [2]. В [1] описаны периодические TI -группы, а также периодическая часть смешанных TI -групп.

Настоящая работа посвящена изучению умножений на факторно делимых абелевых группах. Абелева группа G называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую