2. Ehrlich G. Filial rings // Portugal. Math. 1983-1984. Vol. 42. P. 185-194.
3. Sands A. D. On ideals in over-rings // Publ. Math. Debrecen. 1988. V. 35. P. 273–279.
4. Filipowicz M., Puczylowski E. R. On filial and left filial rings // Publ. Math. Debrecen 2005. Vol. 66. P. 257–267.
5. Andruszkiewicz R., Woronowicz M. On TI-groups // Recent Results in Pure and Applied Math. Podlasie. 2014. P. 33-41.
6. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torsion-free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one // Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. Vol. 7. P. 145–149.
7. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Матем. сб. 1962. Vol. 57. С. 375-383.
8. Gardner B. J., Jackett D. R. Rings on certain classes of torsion free abelian groups // Comment. Math. Univ. Carol. 1976. Vol. 17. P. 493-506.
9. Компанцева Е. И. Ассоциативные кольца на векторных группах // Чебышевский сб. 2015. №4(16). С. 188–199.

УДК 512.542

Об $\mathfrak{F}$-гиперцентре конечных групп и его приложениях

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: mvimath@yandex.ru

On the $\mathfrak{F}$-hypercenter of finite groups and its applications

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)
Francisk Skorina Gomel State University
e-mail: mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используется стандартные терминология и обозначения из [1, 2].

Пусть A — группа автоморфизмов группы G. Л. Калужнин [3] и Ф. Холл [4] показали, что если A стабилизирует некоторую цепь подгрупп группы G, то A нильпотентна. Б. Хупперт [5] и Л. А. Шеметков [6] доказали, что если G имеет A-допустимый ряд подгрупп, в котором предыдущая подгруппа имеет простой индекс в последующей, то A сверхразрешима. Л. А. Шеметков [6] и П. Шмид [7] получили аналоги этих результатов для разрешимо насыщенных формаций. Отметим, что понятие A-$\mathfrak{F}$-гиперцентра группы G играло важную роль в их исследованиях.

Пусть A — группа автоморфмизмов группы G, содержащая все внутренние автоморфизмы, и F — максимальный внутренний локальных экран насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

A-композиционный фактор H/K группы G называется A-$\mathfrak{F}$-*центральным*, если

$$A/C_A(H/K) \in F(p)$$

для всех $p \in \pi(H/K)$. *A-$\mathfrak{F}$-гиперцентром G* называется наибольшая подгруппа G, все A-композиционные факторы ниже которой A-$\mathfrak{F}$-центральны. Обозначается $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G, A)$. Данная подгруппа существует по лемме 6.4 [2, с. 387]. Интерес к A-$\mathfrak{F}$-гиперцентру возник в последние годы в связи с рядом работ зарубежных авторов (см., например, [8, 9, 10]).

В последние годы также был построен и активно изучался различными авторами ряд формаций дисперсивных по Оре групп (см., например [11, 12, 13]). Главным результатом доклада является:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, F — её максимальный внутренний локальный экран и N — дисперсивная по Оре A-допустимая подгруппа группы G, где $\mathrm{Inn}G \leq A \leq \mathrm{Aut}G$. Тогда и только тогда $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G, A)$, когда $N_A(P)/C_A(P) \in F(p)$ для любых силовской p-подгруппы P группы N и простого делителя p порядка N.*

Из данной теоремы непосредственно следует результат Р. Бэра о подгруппах лежащих в сверхразрешимом гиперцентре.

Следствие 1 ([15, теорема 4.1]). *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда $N \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{U}}(G)$, когда N обладает силовской башней сверхразрешимого типа и $N_G(P)/C_G(P) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ для любой силовской p-подгруппы P группы N и любого $p \in \pi(N)$.*

В работе [14] Р. Бэр описал элементы лежащие в гиперцентре. Нами получен аналог его результата для A-гиперцентра.

Следствие 2. *Пусть g — p-элемент группы G и $\mathrm{Inn}G \leq A \leq \mathrm{Aut}G$, где p — простое число. Тогда и только тогда $g \in \mathrm{Z}_\infty(G, A)$, когда $g^\alpha = g$ для любого p'-элемента α группы A.*

Следствие 3 (Р. Бэр [14]). *Пусть p — простое число и G — группа. Тогда и только тогда p-элемент g группы G принадлежит $\mathrm{Z}_\infty(G)$, когда он перестановочен со всеми p'-элементами G.*

Мохаддам и Ростамьяри (см. [10]) ввели понятие автонильпотентной группы. Пусть $x \in G$ и $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}G$. Напомним, что $[x, \alpha] = x^\alpha x^{-1}$ и $[x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\ldots[x, \alpha_1], \alpha_2], \ldots], \alpha_n]$. Пусть

$$L_n(G) = \{x \in G \mid [x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = 1 \ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}G\}.$$

Тогда G называется *автонильпотентной* если $G = L_n(G)$ для некоторого натурального n. Связь этого определения с операторным обобщением гиперцентра показывает

Теорема 2. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда*

$$G = \mathrm{Z}_\infty(G, \mathrm{Aut}G).$$

Другими словами, группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}G$ стабилизирует некоторый ряд подгрупп группы G. Доказательство дальнейших результатов существенным образом опирается на теорему 1.

Некоторые свойства автонильпотентных групп изучались в [10]. В [9] были описаны все абелевые автонильпотентные группы. В частности, не существует абелевых автонильпотентных групп нечетного порядка. Известно (см. теорему 2.2 из [16]), что если p-группа G автонильпотентна, то $\mathrm{Aut}G$ является p-группой. В [17, с. 45] был задан следующий вопрос: “Существуют ли автонильпотентные группы нечетного порядка?”

Предложение 1. *Пусть p — простое число. Тогда и только тогда p-группа G является автонильпотентной, когда $\mathrm{Aut}G$ является p-группой.*

Пример p-группы G порядка p^5 $(p > 3)$ такой, что $\mathrm{Aut}G$ также является p-группой был построен в работе [18]. В библиотеке групп малых порядков системы компьютерной алгебры GAP [19] имеется 30 групп порядка 3^6 таких, что их группы автоморфизмов также являются 3-группами (например, группы [729, 31], [729, 41] и [729, 46]).

Таким образом, получен положительный ответ на вопрос из [17]. Из теоремы 2.3 [10] и леммы 2.9 [16] следует, что группа автнильпотентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих автонильпотентных силовских подгрупп. Нами доказано

Теорема 3. *Группа G автонильптентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих силовских подгрупп и группа автоморфизмов всякой её силовской p-подгруппы является p-группой для любого $p \in \pi(G)$.*

Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда в ней перестановочны элементы взаимнопростых порядков. Нами получен аналогичный результат для автонильпотентных групп.

Следствие 4. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда любой автоморфизм α группы G действует тривиально на всех элементах группы G, у которых порядки взаимнопросты с α.*

Согласно хорошо известному критерию p-нильпотентности Фробениуса (см. [20, теорема 5.26, с. 171]) группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ является p-группой для любой p-подгруппы P группы G и любого $p \in \pi(G)$.

Теорема 4. *Группа G автонильпотентна тогда и только тогда, когда*

$$N_{\mathrm{Aut}G}(P)/C_{\mathrm{Aut}G}(P)$$

является p-группой для любой p-подгруппы P группы G и любого $p \in \pi(G)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — Москва: Наука, 1978. 272 с.
2. Doerk K. Hawkes. T. Finite soluble groups. — Berlin — New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
3. Kaloujnine L. Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen Berliner Mathematische Tagung, Berlin. 1953. P. 164–172.
4. Hall P. Some sufficient conditions for a group to be nilpotent // Illinois J. Math. 1968. Vol. 2, № 4. P. 787–801.
5. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Vol. 60, № 4. P. 409–434.
6. Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Матем. сб. 1974. Том 94(136), № 4(8). С. 628–648.
7. Schmid P. Lokale Formationen endllcher Gruppen // Math. Z. 1974. Vol. 137, № 1. P. 31–48.
8. Hegarty P. V. The absolute center of a group // J. Algebra. 1994. Vol. 169. P. 929–935.
9. Nasrabadi M. M., Gholamiam A. On A-nilpotent abelian groups // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). 2014. Vol. 124, № 4. P. 517–525.

10. Davoudirad S., Moghaddam M. R. R., Rostamyari M. A. Autonilpotent groups and their properties // Asian-European J. Math. 2016. Vol. 9, № 2. 1650056 (7 pages).

11. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51, № 6. С. 1270–1281.

12. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. Vol. 62 P. 307–322.

13. Zimmermann I. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.

14. Baer R. Group elements of prime power index // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 75. P. 20–47.

15. Baer R. Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.

16. Hoseini S., Moghaddam M. R. R., Tajnia S. On Auto-nipoltent groups // Southeast Asian Bull. Math. 2015. Vol. 39. P. 219–224.

17. Arora H., Karan R. On Autonilpotent and Autosoluble Groups // Note Mat. 2018. Vol. 38, № 1. P. 35–45.

18. Curran M. J. Automorphisms of certain p-groups (p odd) // Bull. Austral. Math. Soc. 1988. Vol. 38. P. 299–305.

19. Groups, Algorithms, and Programming (GAP), Version 4.10.1 (2019). — Режим доступа: http://www.gap-system.org.

20. Isaacs I. M. Finite group theory (Graduate studies in mathematics, Vol. 92) — Providence: American Mathematical Society, 2008. 350 p.

—————————————————————————————————

УДК 512.542

О конечных группах

С. В. Путилов (Россия, г. Брянск)
Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

On finite groups

S. V. Putilov (Russia, Bryansk)
Bryansk State University named after I.G. Petrovsky
e-mail: algebra.bgu@yandex.ru

По О. Кегелю [1] подгруппу H группы G называют квазисубнормальной, если $H \cap G_p = H_p$ для любого $p \in \pi(G)$ и каждой силовской p-подгруппы G_p из G.

Теорема 1. *Если в конечной группе любая неквазисубнормальная ненильпотентная максимальная подгруппа имеет индекс равный простому числу или квадрату простого числа, то группа разрешима.*