

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Appel, P. Schupp, Artins groups and infinite Coxeter groups. // Invent. Math. 1983. № 72. С. 201-220.
2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции — Тула, 2003. С. 33-34.
3. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 1-38.
4. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 67-82.
5. Платонова О. Ю. Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой. // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук — Ярославль, 2013.
6. Добрынина И. В., Угаров А. С. О проблеме сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Международная конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ — МГУ, 2019. С. 28-29.

УДК 512.542

Об одном классе композиционных формаций конечных групп

В. И. Мурашко (Беларусь, г. Гомель)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

e-mail: mvimath@yandex.ru

One one class of composition formations of finite groups

V. I. Murashka (Belarus, Gomel)

Francisk Skorina Gomel State University

e-mail: mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Напомним, что подгруппа U группы G называется $\mathfrak{X}$ -максимальной в G , если выполняются следующие два условия: (a) $U \in \mathfrak{X}$, и (b) если $U \leq V \leq G$ и $V \in \mathfrak{X}$, то $U = V$. Символом $\text{Int}_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается пересечение всех $\mathfrak{X}$ -максимальных подгрупп группы G . Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$ -центральным в G , если

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$$

(см., например, [1, с. 6]). Символом $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ обозначается $\mathfrak{X}$ -гиперцентр группы G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что всякий главный фактор H/K группы G ниже нее является $\mathfrak{X}$ -центральным.

Известно, что пересечение максимальных абелевых подгрупп совпадает с центром группы. Согласно Р. Бэру [2], пересечение максимальных нильпотентных подгрупп группы совпадает с её гиперцентром. Тем не менее, существуют примеры групп, у которых пересечение максимальных сверхразрешимых подгрупп не совпадает со сверхразрешимым гиперцентром (см., например, [3, пример 5.17]). Л. А. Шеметков поставил следующую задачу на Гомельском алгебраическом семинаре в 1995:

ЗАДАЧА 1. *Для каких непустых нормально наследственных композиционных (разрешимо-насыщенных) формаций $\mathfrak{X}$ равенство $\text{Int}_{\mathfrak{X}}(G) = Z_{\mathfrak{X}}(G)$ верно для любой группы G ?*

Решение этой задачи в случае наследственных насыщенных (локальных) формаций было получено А. Н. Скибой в [3] (в разрешимом случае также Бейдлеманом и Хайнекемом в [4]). Нами в работе [5] эта задача была решена для класса формаций квази- $\mathfrak{F}$ -групп, где $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, в частности, для формации квазинильпотентных групп. Заметим что методы работ [3, 4] не работают ни в случае ненаследственных, ни в случае ненасыщенных формаций.

Напомним, что *минимальной не- $\mathfrak{X}$ -группой* называется, группа G , не принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{X}$. *Группой Шмидта* называется минимальна ненильпотентная группа. Формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией с условием Шеметкова*, если всякая минимальная не- $\mathfrak{F}$ -группа является или группой Шмидта или группой простого порядка. Результаты об таких формациях можно найти, например, в [6, глава 6.4]. Существуют примеры наследственных ненасыщенных формаций с условием Шеметкова [7, 8, 9]. Согласно [8], всякая наследственная формация с условием Шеметкова является композиционной (разрешимо насыщенной).

А. Ф. Васильев и автор [10] разработали графовый метод для работы с произвольными наследственным формациями с условием Шеметкова. Напомним, что порядок группы Шмидта имеет ровно 2 различных простых делителя и всякая такая группа имеет ровно одну нормальную силовскую подгруппу. Ввиду этого, (p, q) -группой Шмидта называется группа Шмидта, такая, что множество простых делителей ее порядка есть $\{p, q\}$, и имеющая нормальную силовскую p -подгруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([10, Определение 1.3]). *N -критическим графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с множеством простых делителей $\pi(G)$ порядка группы G , такой, что (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$ тогда и только тогда, когда группа G имеет (p, q) -подгруппу Шмидта.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([10, Определение 3.1]). *N -критическим графом $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X})$ класса групп $\mathfrak{X}$ называется ориентированный граф на множестве вершин $\pi(\mathfrak{X}) = \cup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$ такой, что*

$$\Gamma_{Nc}(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma_{Nc}(G).$$

Как было показано в [10, теоремы 3.5 и 4.4], существует биекция между множествами наследственных формаций с условием Шеметкова и ориентированными графами, множества вершин которых являются подмножествами множества всех простых чисел $\mathbb{P}$.

Пусть $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ — разбиение $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества. Заметим, что из [6, теорема 6.4.14] следует, что класс групп

$$\times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} = (G \mid O_{\pi_i}(G) \text{ — холлова } \pi_i\text{-подгруппа } G \text{ для всех } i \in I)$$

является наследственной насыщенной формацией с условием Шеметкова.

Хорошо известно, что класс групп $\mathfrak{F}^S$, все подгруппы которых принадлежат заданной формации $\mathfrak{F}$, является формацией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — формация с условием Шеметкова. Предположим, что равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G . Тогда существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{F}^S = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда и только тогда равенство $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ верно для любой группы G , когда существует разбиение $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества такое, что $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация такая, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{N}$. В частности, $\mathfrak{F}$ — формация с условием Шеметкова.

Из этого предложения следует, что классы всех квазинильпотентных групп $\mathfrak{N}^*$ и групп, абелевы главные факторы которых центральны а оставшиеся являются простыми группами, $\mathfrak{N}_{ca}$ — формации с условием Шеметкова. Как было доказано в [5] равенство $\text{Int}_{\mathfrak{N}^*}(G) = Z_{\mathfrak{N}^*}(G)$ верно для любой группы G и существует группа H такая, что $\text{Int}_{\mathfrak{N}_{ca}}(H) \neq Z_{\mathfrak{N}_{ca}}(H)$. Таким образом обратное утверждение к представленной теореме неверно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo W. Structure theory for canonical classes of finite groups. — Heidelberg — New-York — Dordrecht — London: Springer, 2015.
2. Baer R. Group Elements of Prime Power Index // Trans. Amer. Math Soc. 1953. Vol. 75, № 1. P. 20-47.
3. Skiba A. N. On the $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group // J. Pure Appl. Algebra. 2012. № 216(4). P. 789-799.
4. Beidleman J. C., Heineken H. A note of intersections of maximal $\mathfrak{F}$ -subgroups // J. Algebra. 2010. № 333. P. 120-127.
5. Murashka V. I. On the $\mathfrak{F}$ -hypercenter and the intersection of $\mathfrak{F}$ -maximal subgroups of a finite group // J. Group Theory. 2018. Vol. 23, № 3. P. 463-473.
6. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer, 2006.
7. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. Two questions of L. A. Shemetkov on critical groups // J. Algebra. 1996. № 179. P. 905-917.
8. Kamornikov S. F. On two problems by L. A. Shemetkov // Sib. Math. J. 1994. Vol. 35, № 4. P. 713-721.
9. Васильев А. Ф. Об одном вопросе теории формаций конечных групп // Изв. Акад. Наук Беларуси. 1994. № 3. С. 121-122.
10. Vasil'ev A. F., Murashka V. I. Arithmetic graphs and classes of finite groups // Sib. Math. J. 2019. Vol. 60, № 1. P. 41-55.