Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **январь–февраль** **Том 58 № 1**

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

В. И. МУРАШКО

СВОЙСТВА КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП С P-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 11.11.2013*

Рассматриваются только конечные группы. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется **P**-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1, \ldots, n$. Из известной теоремы Хупперта следует, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа **P**-субнормальна. В [1–4] исследовались группы с различными системами **P**-субнормальных подгрупп. В частности, в [1] изучался класс $w\mathbf{U}$ всех групп, у которых каждая силовская подгруппа **P**-субнормальна. Было установленно, что $w\mathbf{U}$ является разрешимой насыщенной наследственной формацией, отличной от формации **U** всех сверхразрешимых групп. Группы из класса $w\mathbf{U}$ называют w-сверхразрешимыми. В работе [3] изучался класс **X** всех групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа **P**-субнормальна и была доказана

Т е о р е м а 1 [3]. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) Класс **X** *является насыщенной наследственной формацией;*

(2) Группа G принадлежит **X** *тогда и только тогда, когда она обладает силовской башней сверхразрешимого типа* (*дисперсивна по Оре*) *и каждая бипримарная подгруппа G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима;*

(3) Всякая минимальная не **X**-*группа является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой все силовские подгруппы, не являющиеся нормальными, циклические.*

Как показано [1; 3], $\mathbf{U} \subset w\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$.

Так как **X** является насыщенной формацией, то из теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида [5, с. 368] следует, что **X** – локальна. Напомним определение локальной формации. Пусть **P** – множество всех простых чисел. Функция $f : \mathbf{P} \to$ {формации} называется локальным экраном. Формация **F** называется локальной, если ее можно задать следующим образом: $\mathbf{F} = \langle f \rangle = (G\ |$, если H / K является главным фактором группы G, то $G / C_G(H / K) \in f(p)$ для любого простого p, делящего $|H / K|)$, где f – локальный экран. В этом случае говорят, что f является локальным экраном формации **F**.

В [1] был найден локальный экран формации $w\mathbf{U}$. Однако вопрос о нахождении локального экрана формации **X** оставался открытым. Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 2. *Формация* **X** *имеет локальный экран f такой, что $f(p)$ состоит из всех тех разрешимых групп, у которых все циклические примарные подгруппы имеют экспоненту, делящую $p - 1$.*

Согласно [1], обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что факторгруппа G / N имеет абелевы силовские подгруппы. В [1] было показано, что всякая w-сверхразрешимая группа имеет нильпотентный обобщенный коммутант.

С л е д с т в и е 1. *Группа G w-сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный обобщенный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа* **P**-*субнормальна.*

С л е д с т в и е 2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа* **P**-*субнормальна.*

Полученный в теореме 2 локальный экран f формации **X** не является внутренним, так как существует такое простое число p, что $f(p)$ не содержится в **X**. Действительно, пусть A_4 – знакопеременная группа степени 4 и $p = 73$. Заметим, что $A_4 \in f(73)$. Так как любая циклическая 3-подгруппа из A_4 не является **P**-субнормальной в ней, то $A_4 \notin$ **X**.

Если $\mathbf{N}_p$ – формация всех p-групп, то по предложению 3.8 [5, с. 360] формация **X** имеет единственный максимальный внутренний локальный экран F такой, что $F(p) = \mathbf{N}_p(f(p) \cap \mathbf{X})$ для любого простого числа p.

Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации **H** и N – нормальная подгруппа группы G. Говорят, что N – **H**-гиперцентральная подгруппа в G, если для любого главного фактора H / K группы G, содержащегося в N, выполняется $G / C_G(H / K) \in F(p)$ для любого простого p, делящего $|H / K|$.

Следующая теорема аналогична результату Бэра [7, с. 39] о строении **U**-гиперцентральной (сверхразрешимо вложенной в терминологии Бэра) подгруппе.

Т е о р е м а 3. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $R_q = N_G(Q) / C_G(Q)$, где Q – силовская q-подгруппа N. Следующие условия эквивалентны*:

1) N – **X**-*гиперцентральная подгруппа G;*

2) N обладает силовской башней сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q / O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q - 1$, и **P**-*субнормальны в $R_q / O_q(R_q)$ для любого простого q, делящего $|N|$.*

С л е д с т в и е 3. *Группа G принадлежит* **X** *тогда и только тогда, когда G обладает силовской башней сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q / O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q - 1$, и* **P**-*субнормальны в $R_q / O_q(R_q)$ для любого простого q, делящего $|G|$, где $R_q = N_G(Q) / C_G(Q)$ и Q – силовская q-подгруппа G.*

Формация **X** не является радикальной. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации **X** и $p = 3$. Рассмотрим $G = \langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle$. Заметим, что $G \notin F(3)$, но G содержит нормальные подгруппы $A = \langle(1\ 3)(2\ 4), (1\ 3)\rangle$ и $B = \langle(1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\rangle$, которые принадлежат $F(3)$. Заметим, что $G = AB$. Следовательно, формация $F(3)$ не радикальна. Тогда по предложению 4.10 [6, с. 43] формация **X** не радикальна.

Т е о р е м а 4. *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих* **P**-*субнормальных* **X**-*подгрупп A и B. Если $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то группа G принадлежит* **X**.

В работе используются стандартные определения и обозначения из [5; 6]. Напомним, некоторые из них. Через $F_p(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех главных факторов группы G, порядки которых делятся на p. Известно [6, с. 34], что $F_p(G)$ является p-нильпотентным радикалом группы G. Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Тогда группа G принадлежит **F** тогда и только тогда, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого простого p, делящего $|G|$ (см. лемма 4.5 [6, с. 38]). Если **F** – класс групп, то группа G называется минимальной не **F**-группой, если G не принадлежит **F**, а всякая собственная подгруппа G принадлежит **F**.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Вначале установим, что класс $f(p)$ – формация для любого простого p. Пусть p – простое число, группа $G \in f(p)$ и $N \lhd G$. Покажем, что $G / N \in f(p)$. Так как G разрешима, то и G / N разрешима. Пусть $A / N = \langle xN \rangle$ – циклическая q-подгруппа в G / N для некоторого простого числа q и Q – силовская q-подгруппа $\langle x \rangle$. Очевидно, что Q – циклическая подгруппа и $A = QN$. По условию Q имеет экспоненту, делящую $p - 1$. Откуда $QN / N = A / N$ имеет экспоненту, делящую $p - 1$. Следовательно, класс $f(p)$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов.

Покажем, что класс $f(p)$ замкнут относительно подпрямых произведений. Достаточно показать, что если в группе G найдутся нормальные подгруппы N_1 и N_2 такие, что $G / N_i \in f(p)$ для $i = 1, 2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$, то $G \in f(p)$. Очевидно, что в этом случае группа G разрешима. Пусть A – циклическая примарная подгруппа группы G. Заметим, что в A имеется единственная минимальная нормальная подгруппа. Из $N_1 \cap N_2 = 1$ следует, что хотя бы одна из подгрупп N_1 или N_2 имеет с A единичное пересечение. Без ограничения общности предположим, что $N_2 \cap A = 1$. Тогда $AN_2 / N_2 \cong A$ имеет экспоненту, делящую $p - 1$. Значит, $G \in f(p)$. Следовательно, класс $f(p)$ является формацией.

Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Так как $f(p)$ – наследственная формация для любого простого p, то по предложению 3.14 [5, с. 364] $\mathbf{F}$ – наследственная формация. Пусть h – локальный экран такой, что $h(p)$ есть формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p - 1$, для любого простого числа p. Хорошо известно, что h – локальный экран формации $\mathbf{U}$ всех сверхразрешимых групп. Так как $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p, то $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}$.

Докажем, что $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Предположим, что $\mathbf{X}$ не содержится в $\mathbf{F}$. Выберем группу G наименьшего порядка из класса $\mathbf{X} \setminus \mathbf{F}$. Заметим, что G разрешима. Так как обе формации $\mathbf{X}$ и $\mathbf{F}$ насыщены, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации $\mathbf{X}$ следует, что G является минимальной не $\mathbf{F}$-группой. Так как $\mathbf{F}$ – формация, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. В этом случае N – абелева p-подгруппа и $N = C_G(N)$. Пусть M – максимальная подгруппа G, не содержащая N. Тогда $G = NM$. В силу абелевости N, имеем $N \cap M = 1$. Так как группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа по утверждению (2) теоремы 1, то p является наибольшим простым делителем $|G|$ и $(p, |M|) = 1$. Пусть H – собственная подгруппа в M. Заметим, что $O_{p'}(NH) = 1$, так как $N = C_G(N)$. Следовательно, $F_p(NH) = N$. Так как по условию $NH \in \mathbf{F}$, то $H \cong NH / F_p(NH) \in f(p)$. Значит, M – минимальная не $f(p)$-группа. Если M не является циклической примарной группой, то $M \in f(p)$, что противоречит тому, что M – не $f(p)$-группа. Следовательно, M – циклическая примарная подгруппа. Но тогда по утверждению (2) теоремы 1 группа G сверхразрешима. Получили противоречие. Значит, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}$.

Предположим, что $\mathbf{F}$ не содержится в $\mathbf{X}$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathbf{F} \setminus \mathbf{X}$. Так как обе формации $\mathbf{X}$ и $\mathbf{F}$ насыщенны, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации $\mathbf{F}$ следует, что G является минимальной не $\mathbf{X}$-группой. Из утверждения (3) теоремы 1 следует, что в этом случае G является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой единственная минимальная нормальная подгруппа N совпадает со сверхразрешимым корадикалом группы G и является силовской p-подгруппой, а силовская q-подгруппа Q группы G является циклической. Заметим, что $N = C_G(N)$. Так как $G \in \mathbf{F}$, то $G/C_G(N) \cong Q \in f(p)$. Так как $Q \in f(p)$ и циклическая, то Q – абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$, и $Q \in h(p)$. Следовательно, G сверхразрешима. Но тогда $G \in \mathbf{X}$. Противоречие. Значит, $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Обозначим через $\mathbf{N}\boldsymbol{A}$ класс групп с нильпотентным обобщенным коммутантом. Заметим, что следствие 1 эквивалентно утверждению, что $w\mathbf{U} = \mathbf{N}\boldsymbol{A} \cap \mathbf{X}$. Согласно 10 [6, с. 36], класс групп с обобщенным нильпотентным коммутантом является локальной формацией с локальным экраном h таким, что $h(p)$ – формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами для любого простого p. Как было показано в теореме 2, формация $\mathbf{X}$ имеет локальный экран f, где $f(p)$ – класс разрешимых групп с циклическими примарными подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Очевидно, что $\mathbf{N}\boldsymbol{A} \cap \mathbf{X}$ – локальная формация, имеющая локальный экран t такой, что $t(p) = f(p) \cap h(p)$ для любого простого p. Из строения формаций $f(p)$ и $h(p)$ следует, что $t(p)$ есть формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Как было показано в [1], t – локальный экран формации $w\mathbf{U}$.

Следствие 2 доказывается аналогично следствию 1.

Лемма. *Пусть P – p-подгруппа группы G и R – нормальная r-подгруппа G, где $r \neq p$ – простые числа. Тогда справедливы равенства $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ и $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.*

Доказательство. Равенство $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ следует из леммы 1.68 [8, с. 56]. Докажем, что $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$. Очевидно, что $C_{G/R}(PR / R) \leq N_{G/R}(PR / R) = N_G(P)R / R$. Пусть $C / R = C_{G/R}(PR / R)$. Тогда каждый элемент $c \in C$ представим в виде xy, где $x \in N_G(P)$ и $y \in R$, и для любого $p \in P$ выполняется $[p, c] \in R$. Если предположить, что $C_G(P)R / R \neq C_{G/R}(PR / R)$, то найдутся элементы $x \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ и $y \in R$ такие, что $c = xy \in C$. Заметим, что существует элемент $p \in P$ такой, что $p^x = p_1 \neq p$ и $p_1 \in P$. Тогда $[p, c] = p^{-1}p_1^{\,y} = p^{-1}p_1[p_1, y] \in R$. Так как $R \lhd G$, то $[p_1, y] \in R$. Значит $1 \neq p^{-1}p_1 \in R$. Но $p^{-1}p_1 \in P$ и $P \cap R = 1$. Значит, $p_1 = p$. Полученное противоречие доказывает равенство $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathbf{X}$ и N – $\mathbf{X}$-гиперцентральная нормальная подгруппа группы G. Ввиду наследственности формации $F(p)$ для всех простых p, получаем $N \in \mathbf{X}$. Из утверждения (2) теоремы 1 следует, что N обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Значит, в N имеется нормальная силовская q-подгруппа Q. Заметим, что $Q \lhd G$. Значит, подгруппа Q является $\mathbf{X}$-гиперцентральной в G. Пусть $1 = Q_0 \leq Q_1 \leq ... \leq Q_n = Q$ – участок главного ряда группы G от 1 до Q. Тогда из $\mathbf{X}$-гиперцентральности Q следует, что $G / C_G(Q_i / Q_{i-1}) \in F(q)$ для $i = 1, ..., n$. Пусть $L = \cap\, C_G(Q_i / Q_{i-1})$, где $i = 1, ..., n$. Тогда $G / L \in F(q)$ и $C_G(Q) \leq L$. Предположим, что $L / C_G(Q)$ не является q-группой. Пусть порядок $xC_G(Q)$ из $L / C_G(Q)$ взаимно прост с q и α – автоморфизм Q, индуцированный x. Тогда по лемме 3.10 [6, с. 27] следует, что α – тождественный автоморфизм. Противоречие. Значит $L / C_G(Q)$ – q-группа. Так как формация $F(q) = \mathbf{N}_q F(q)$, то $N_G(Q) / C_G(Q) \in F(q)$. Если $Q = N$, то утверждение 2 доказано.

Пусть $Q < N$. Заметим, что N / Q $\mathbf{X}$-гиперцентральна в G / Q. Используя индукцию по порядку G, можно считать, ввиду строения $F(q)$, что $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \in F(p)$ для любой силовской p-подгруппы P группы N, где $p \neq q$. По лемме 1 имеем $N_{G/Q}(PQ/Q)/C_{G/Q}(PQ/Q) \cong N_G(P)Q/C_G(P)Q = N_G(P)(C_G(P)Q)/C_G(P)Q \cong N_G(P)/(N_G(P) \cap C_G(P)Q)$. Так как порядки P и Q взаимно просты и $Q \lhd G$, то $C_G(P)Q \cap N_G(P) = C_G(P)$. Следовательно, $N_{G/Q}(PQ/Q)/C_{G/Q}(PQ/Q) \cong N_G(P)/C_G(P) \in F(p)$. Из свойств $F(p)$ следует утверждение 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Заметим, что условия 2) теоремы сохраняются при гомоморфизмах. Пусть G – группа наименьшего порядка, имеющая нормальную не $\mathbf{X}$-гиперцентральную подгруппу N, удовлетворяющую 2), и пусть p – наибольший простой делитель порядка N. Тогда силовская p-подгруппа P группы N нормальна в G. Пусть H / K – главный фактор G и $H \leq P$. Так как $C_G(P) \leq C_G(H / K)$ и $G / C_G(P) = N_G(P) / C_G(P) \in F(p)$, то $G / C_G(H / K) \in F(p)$ и P – $\mathbf{X}$-гиперцентральная подгруппа G. Согласно предположению, N / P $\mathbf{X}$-гиперцентральна в G / P. Так как подгруппа P является $\mathbf{X}$-гиперцентральной в G, то подгруппа N является $\mathbf{X}$-гиперцентральной в G. Полученное противоречие показывает, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Пусть Z – произвольная циклическая примарная подгруппа G. Достаточно показать, что подгруппа Z^x является $\mathbf{P}$-субнормальной в G для некоторого элемента $x \in G$. Так как Z примарна, то найдется силовская подгруппа P в G такая, что $Z \leq P$. Ввиду $(|G : A|, |G : B|) = 1$ существует элемент $x \in G$ такой, что $P^x \leq A$ или $P^x \leq B$. Пусть $P^x \leq A$. Так как $A \in \mathbf{X}$, то подгруппа Z^x является $\mathbf{P}$-субнормальной в A. По условию подгруппа A является $\mathbf{P}$-субнормальной в G. Следовательно, Z^x – $\mathbf{P}$-субнормальная подгруппа в G. Теорема доказана.

Литература

1. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
3. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
4. *Kniahina V. N., Monakhov V. S.* // IGJT. 2013. Vol. 2, N 4. P. 21–29.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, 1992.
6. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М., 1978.
7. Between nilpotent and solvable / ed. by M. Weinstein. Passaic, 1982.
8. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск, 2006.

V. I. MURASHKA

mvimath@yandex.by

PROPERTIES OF THE CLASS OF FINITE GROUPS WITH P-SUBNORMAL CYCLIC PRIMARY SUBGROUPS

Summary

The canonical local definition of the hereditary saturated formation **X** of all finite groups with **P**-subnormal cyclic primary subgroups was found in the article. The new criterion of the normal subgroup to be **X**-hypercentral was obtained using this definition. It was shown that the class **X** is closed under taking the products of **P**-subnormal subgroups with coprime indices.