О МУЛЬТИФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Васильев А. Ф.[1], **Балычев С. В.**[2]

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь;
[1]formation56@mail.ru, [2]sergey.baluchev@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Группа G является произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если $G = A_1A_2 \cdots A_n$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для всех целых i и j с $1 \leq i, j \leq n$. В этом случае для любого набора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ произведение $A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ будет подгруппой группы G.

В настоящем сообщении мы продолжаем исследования работы [1], решая следующую задачу. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Найти подходящий класс групп $\mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{F}$, такой, что $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу $G = A_1A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно перестановочные подгруппы G и каждое произведение не более чем k подгрупп A_i содержится в классе $\mathfrak{F}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, k — натуральное число. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k^{\mathfrak{X}}$, если всякая группа G, представимая в виде произведения попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что для каждого выбора индексов $i \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ подгруппа $A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k} \in \mathfrak{F}$, принадлежит классу $\mathfrak{X}$.

В классе разрешимых групп справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $\mathfrak{X} = LF(h)$ — наследственные локальные формации, где f и h — максимальные внутренние локальные экраны $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, и k — натуральное число, $k \geq 2$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathcal{P}_k^{\mathfrak{X}}$, когда $f(p)$ обладает свойством $\mathcal{P}_{k-1}^{h(p)}$ для любого простого p.*

С помощью этой теоремы найдена «достаточно маленькая» разрешимая наследственная локальная формация $\mathfrak{X}$, для которой формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп обладает свойством $\mathcal{P}_2^{\mathfrak{X}}$.

Пусть группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В [2, теорема VI, 10.2] Хупперт показал, что G сверхразрешима, если каждое произведение $A_iA_jA_k$ сверхразрешимо. В [3] Л. С. Казарин установил, что если каждое произведение A_iA_j разрешимо, то и G разрешима.

Теорема 2. *Пусть группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если A_iA_j — сверхразрешимая подгруппа для всех $1 \leq i, j \leq n$ и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фундаментальная прикладная математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.
3. *Казарин Л. С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 34, № 7–8. С. 947–950.