Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 519.95 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Ю. П. ЛЕОНОВ

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 30 IX 1970)

В работе исследуются решения специального класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эти уравнения получаются при решении задачи идентификации [1] динамической системы методом наименьших квадратов.

Рассматриваются два случая:

а) наблюдению доступна какая-либо точка возмущения системы;

б) наблюдению доступно только установившееся движение системы.

Если наблюдению доступна какая-либо точка возмущения системы, то оценка ее весовой функции оказывается более точной относительно оценки, полученной при наблюдении ее установившегося движения.

Показывается, что в обоих случаях существует решение задачи в фактор-пространстве с энергетической нормой [2]. Решение может быть неединственным; однако все решения эквивалентны с точки зрения минимума среднего квадрата ошибки. В энергетическом фактор-пространстве определяется приближенное решение задачи, что является альтернативным решением задачи идентификации как некорректной задачи [3].

а) Наблюдению доступно какое-либо возмущение системы входным сигналом $x(t)$. Линейная система с постоянными параметрами описывается матричной весовой функцией $w(\tau)$. Система возбуждается сигналом $x(t)$ на интервале $(0, T)$. На ее выходе наблюдается сигнал $u(t)$, являющийся искаженной версией истинного выходного сигнала $y(t)$. В данном случае наблюдается возмущение системы в момент приложения сигнала $x(t)$ при $t=0$. Предполагается, что система имеет конечную память и, следовательно, сигнал $y(t)$ представляется в виде

$$y(t)=\int_0^t w(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T_1,$$

$$y(t)=\int_0^{T_1} w(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau,\quad t>T_1, \tag{1}$$

$x(t)$ — сигнал на входе, вектор-функция $n\times 1$; $y(t)$ — истинный выходной сигнал, вектор-функция $m\times 1$; $w(\tau)$ — весовая функция, матрица $m\times n$.

На интервале $(0, T)$ наблюдаются функции $x(t)$ и $u(t)$. Необходимо при сделанных предположениях найти оценку весовой фукции системы $w(\tau)$.

Пусть весовая функция ищется из условия минимума интеграла от квадрата ошибки

$$\varepsilon^2=\|u(t)-y(t)\|^2, \tag{2}$$

где норма в пространстве вектор-функций $L_2(0, T_1)$ определяется формулой

$$(z, z)=\int_0^T z'(t)\,z(t)\,dt,\quad z\in L_2(0, T)$$

и штрих означает транспонирование.

Для минимизации функционала (2) достаточно найти минимум каждого слагаемого ε_i^2, входящего в ε^2:

$$\varepsilon_i^2 = \|u_i(t) - y_i(t)\|^2, \tag{3}$$

u_i и y_i — скалярные функции.

Вместо (3) можно использовать равноценный ему функционал

$$I(\omega_i) = (B\omega_i, \omega_i) - 2(\omega_i, \chi_i), \tag{4}$$

где ω_i — вектор, являющийся транспонированной i-й строкой матрицы w;

$$B\omega_i = \int_0^{T_1} K(\tau_1, \tau)\,\omega_i(\tau)\,d\tau; \tag{5}$$

$K(\tau_1, \tau)$ — симметричная матрица $(n \times n)$, определяемая интегралом

$$\begin{gathered} K(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{T} x(t-\tau_1)\,x'(t-\tau_2)\,dt, \quad \tau_1 \geqslant \tau_2, \\ K(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_2}^{T} x(t-\tau_1)\,x'(t-\tau_2)\,dt, \quad \tau_1 < \tau_2, \end{gathered} \tag{6}$$

$\chi_i(\tau)$ — вектор-функция $n \times 1$,

$$\chi_i(\tau) = \int_{\tau}^{T} x(t-\tau)\,u_i(t)\,dt. \tag{7}$$

Функционал $I(\omega_i)$ ограничен снизу, так как

$$I(\omega_i) \geqslant -\|u_i\|^2.$$

Оператор B в (5) является самосопряженным и положительным, так как

$$(B\omega_i, \omega_i) = \int_0^T \left[\int_0^t x'(t-\tau)\,\omega_i(\tau)\,d\tau\right]^2 dt \geqslant 0.$$

Наконец, B — вполне непрерывный оператор, так как

$$\int_0^{T_1}\int_0^{T_1} \|K(\tau, \tau_1)\|^2\,d\tau\,d\tau_1 < \infty,$$

где норма матрицы K определяется формулой

$$\|K\| = \sqrt{\operatorname{Tr} K'K}.$$

Относительно вектор-функции ω_i^*, дающей минимум функционалу (4), имеет место [2]

Теорема 1. *Пусть $x \in L_2(0, T)$ и $u_i \in L_2(0, T)$. Тогда множество элементов, на каждом из которых функционал $I(\omega_i)$ достигает минимума, является элементом фактор-пространства $H / \bar{S}$.*

Фактор-пространство $H / \bar{S}$, содержащее решение, строится следующим образом. Пусть $S(B)$ — замыкание в L_2 линейной оболочки множества собственных векторов оператора B, соответствующих отличным от нуля собственным числам оператора B. На $S(B)$ вводится энергетическая норма формулой

$$\|z\|_B^2 = \int_0^{T_1} z'(t)\,B_t z\,dt, \quad z \in S(B);$$

затем оператор B расширяется с $S(B)$ на пространство H_B, для чего $S(B)$ пополняется последовательностями, сходящимися в смысле введенной нормы. Далее определяется пространство

$$H = H_B \oplus \bar{S}(B),$$

где $\bar{S}(B)$ — пространство нулей оператора B. Наконец, определяется искомое фактор-пространство $H / \bar{S}$ пространства H по подпространству $\bar{S}(B)$; нулевым элементом $H / \bar{S}$ является пространство $\bar{S}(B)$.

Доказательство теоремы 1 можно получить, если заметить, что последовательность вектор-функций

$$\omega_i^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\chi_i, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \tag{8}$$

где φ_k, λ_k — собственные функции и собственные значения оператора B, является минимизирующей для функционала $I(\omega_i)$.

Согласно доказанной теореме, решение задачи может быть неединственным. Однако на всех таких элементах функционал $I(\cdot)$ достигает своего стационарного значения. Поэтому все решения с этой точки зрения равноценны. В случае $\bar{S}(B) = \{0\}$ решение задачи единственно.

Для решения задачи идентификации важно уметь находить численно элемент ω_i^*, минимизирующий функционал $I(\omega_i)$. Введенное фактор-пространство позволяет использовать различные приближенные методы для нахождения ω_i^*. В частности, для этого можно использовать минимизирующую последовательность ω_i^n (8). Однако последнее неудобно из-за наличия в (8) трудновычислимых φ_k и λ_k.

Более простым является использование рекуррентной последовательности метода наискорейшего спуска вида

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + \mu_i^n V_i^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad V_i^n = B\omega_i^n - \chi_i; \quad \mu_i^n = -\|V_i\|^2 / \|V_i\|_B^2; \tag{9}$$

ω_i^0 выбирается произвольно в H.

Сходимость ω_i^n (9) к элементу ω_i^x, минимизирующему функционал $I(\omega_i)$, определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. *Пусть $x \in L_2(0, T)$ $u_i \in L_2(0, T)$.*

Тогда последовательность (9) *сходится по энергетической норме к элементу ω_i^*, минимизирующему функционал $I(\omega_i)$.*

Доказательство теоремы 2 проводится прямым вычислением $I(\omega_i)$ с последующим использованием свойства полной непрерывности оператора B.

Вследствие неединственности функции ω_i^* приближения будут зависеть от выбора начальной точки ω_i^0. Однако при любом элементе ω_i^0 функционал $I(\omega_i^*)$ имеет одно и то же стационарное значение. Если оборвать процесс вычисления (9) на конечном n, то для любой $\omega_i^0 \in L_2(0, T_1)$ также $\omega_i^n \in L_2(0, T_1)$.

Для приближенного вычисления ω_i^n можно использовать также любую процедуру, но сходимость последовательности ω_i^n к ω_i^* при этом будет иметь место по норме энергетического пространства $H / \bar{S}$.

б) Н а б л ю д е н и ю д о с т у п н о у с т а н о в и в ш е е с я д в и ж е н и е с и с т е м ы. В этом случае система наблюдается после переходного процесса на интервале $T_1 \leqslant t \leqslant T$ *. Квадратичный функционал принимает вид

$$I(\omega_i) = (L^* L\omega_i, \omega_i) - 2(\omega_i, L^* \tilde{u}_i), \tag{4'}$$

где

$$L\omega_i = \int_0^{T_1} \tilde{x}'(t - \tau)\, \omega_i(\tau)\, d\tau, \qquad L^* u = \int_0^{\tilde{T}} \tilde{x}(t - \tau)' u(t)\, dt; \tag{10}$$

$$\tilde{x}(t) = x(t + T_1); \tag{11}$$

$$\tilde{T} = T - T_1, \tag{12}$$

$u(t)$ — скалярная функция.

* В системе с конечной памятью T_1 переходной процесс длится время T_1.

В отличие от (4) оператор B в (4′) оказывается произведением

$$B = L^* L. \tag{13}$$

Вследствие этой особенности подпространство $S(B)$ оператора B является, как правило, более «богатым» по сравнению с подпространством $S(L^*L)$ оператора L^*L.

Оценка ω_i^* является проекцией истинной весовой функции ω_i на подпространство H_B. Поэтому для неразложимого оператора B оценка весовой функции ω_i^* оказывается, как правило, более точной.

Для понимания последнего замечания достаточно рассмотреть следующий пример. Пусть тест-сигналом является единичная функция

$$x(t) = 1[t].$$

В этом случае, если наблюдение производится на интервале $(0, T)$, то имеется возможность наблюдать реакцию на возмущение типа единичного скачка. Если же система наблюдается при $t > T_1$, то доступна наблюдению лишь реакция системы на постоянный единичный сигнал.

В первом случае подпространство $S(B)$ является полным; весовая функция ω_i^* определяется достаточно точно.

Действительно, ядро интегрального оператора B в этом случае имеет вид

$$K(\tau_1, \tau_2) = T - \tau_1, \quad \tau_1 \geqslant \tau_2,$$
$$K(\tau_1, \tau_2) = T - \tau_2, \quad \tau_1 < \tau_2; \quad 0 \leqslant \tau_1, \tau_2 \leqslant T_1.$$

Нетрудно показать, что собственные функции интегрального оператора B с ядром $K(\tau_1, \tau_2)$ имеют вид

$$\varphi_i(\tau) = A \cos \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \tau,$$

где собственные числа являются решениями уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\mu}}{T-1}.$$

Система собственных функций $\{\varphi_i\}$ является полной, так что оценка весовой функции ω_i^* может быть вычислена с достаточной точностью.

В случае наблюдения только установившегося состояния системы для $t > T_1$, ядро $K(\tau_1, \tau_2)$ оператора L^*L тождественно равно $T - T_1$. Следовательно, единственной собственной функцией оператора L^*L будет константа, и подпространство является весьма бедным.

Этот результат, конечно, не является неожиданным, так как хорошо известно, что сигнал типа единичного скачка является хорошим тест-сигналом, в то время как константа позволяет определить лишь «коэффициент усиления» фильтра.

Разумеется, аналогичный результат имеет место для возмущения в любой точке на интервале $(0, T)$.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
24 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] 2-nd Prague IFAC Symposium 1970 on Identification and Process Parameter, 1970. [2] Ю. Леонов, The IFAC Symposium, Prague, June, 1970. [3] А. Тихонов, ДАН, 151, № 3, 501 (1963). [4] H. G. Hsieh, Information and Control J., 7, 84 (1964).